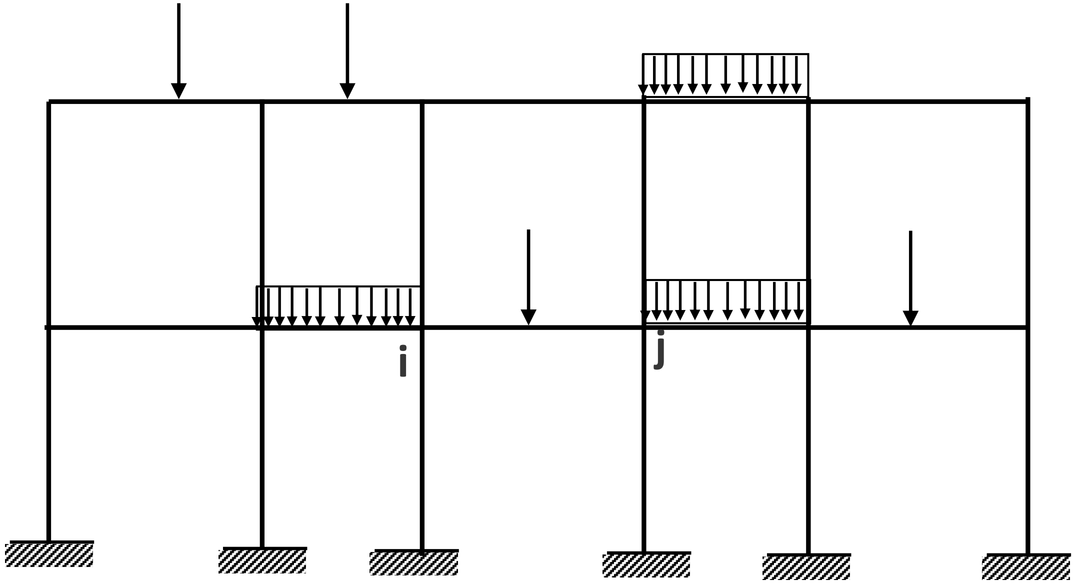
YAPI STATİĞİ 2-HİPERSTATİK SİSTEMLER DEPLASMAN METODLARI (2-1)

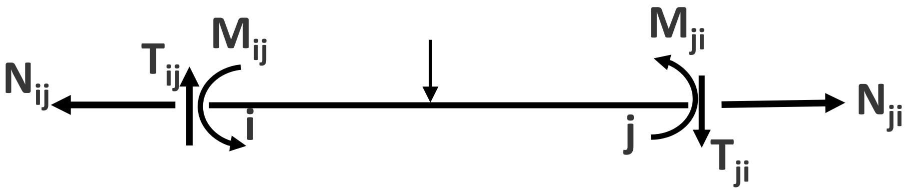
Prof. Dr. Cengiz Dündar

Kapsam

1. Açı metodu
2. Cross Metodu
3. Kani metodu
4. Rijitlik matrisi metodu

Yardımcı Bilgiler





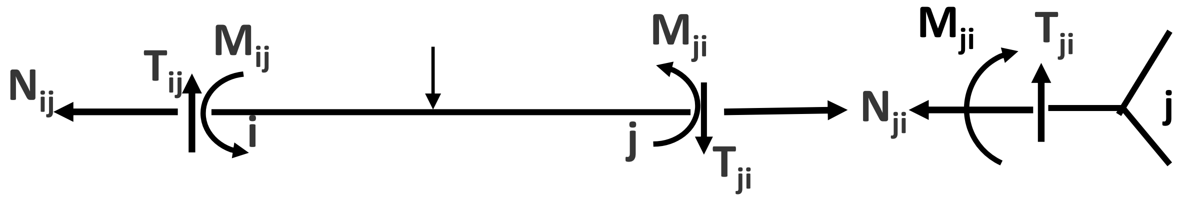
Uç kuvvetler:

Uç momentler çubuğu saat akrebinin tersi yönünde döndürdüğü zaman pozitif (+) aksi yönde döndürdüğü zaman negatif (-) olarak kabul edilir.

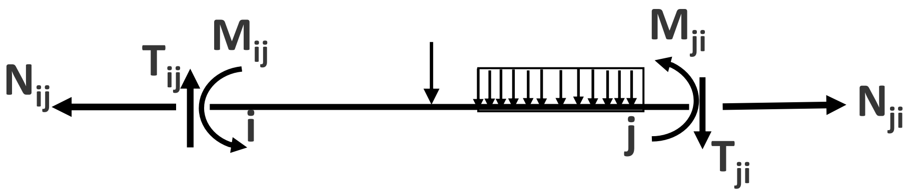
Kesme kuvvetleri çubuğu saat akrebinin tersi yönünde döndürdüğü zaman pozitif (+)kabul edilir.

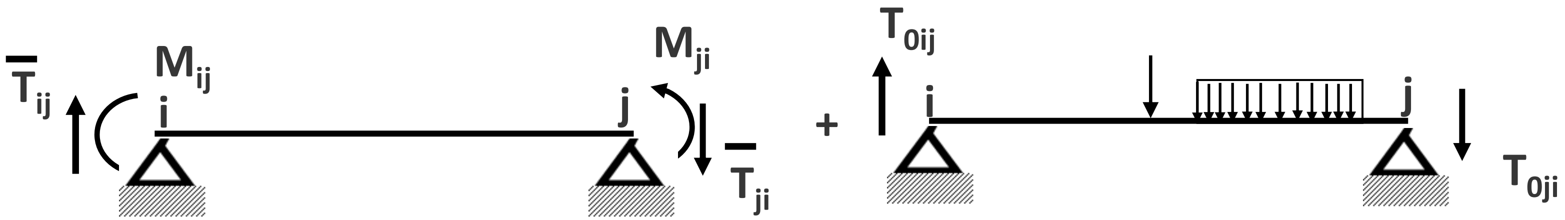
Normal kuvvetler çekme olduklarında pozitif (+) basınç olduklarında negatif (-) kabul edilir.

Düğüm noktasını saat akrebi yönünde döndüren moment pozitif (+) kabul edilir



Uç kuvvetleri arasındaki bağıntılar :





$$T_{ij} = T_{0ij} + \overline{T}_{ij} = T_{0ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

$$T_{ji} = T_{0ji} + \overline{T}_{ji} = T_{0ji} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

$$N_{ij} = N_{ji}$$

Uç deplasmanlar:

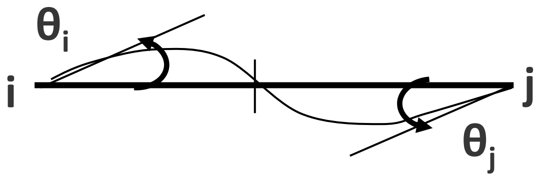
a. Açısal uç deplasmanlar

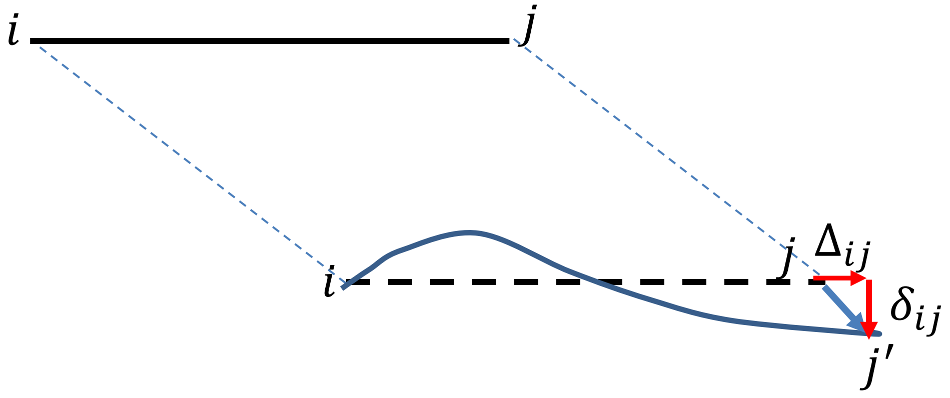
b. Lineer uç deplasmanlar

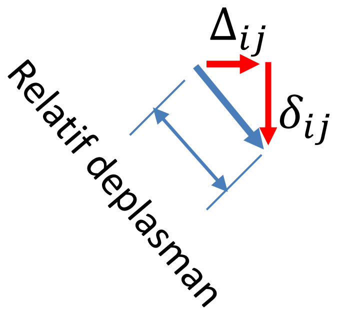
θ_i ve θ_j lere açısal uç deplasmanlar denir. Çubuğun ucunu saat akrebinin tersi yönünde döndürürse pozitif kabul edilir

δ_{ij}: Bir ucun diğer uca nazaran relatif deplasmanının
çubuk eksenine dik doğrultudaki iz düşümü.
çubuğun ucu saat akrebi yönünde döndüğü
zaman (+) pozitifdir.

Δ_{ij}: Bir ucun diğer uca nazaran relatif deplasmanının
çubuk ekseninindeki iz düşümü.
Çekme yönünde olduğu zaman (+) pozitifdir.

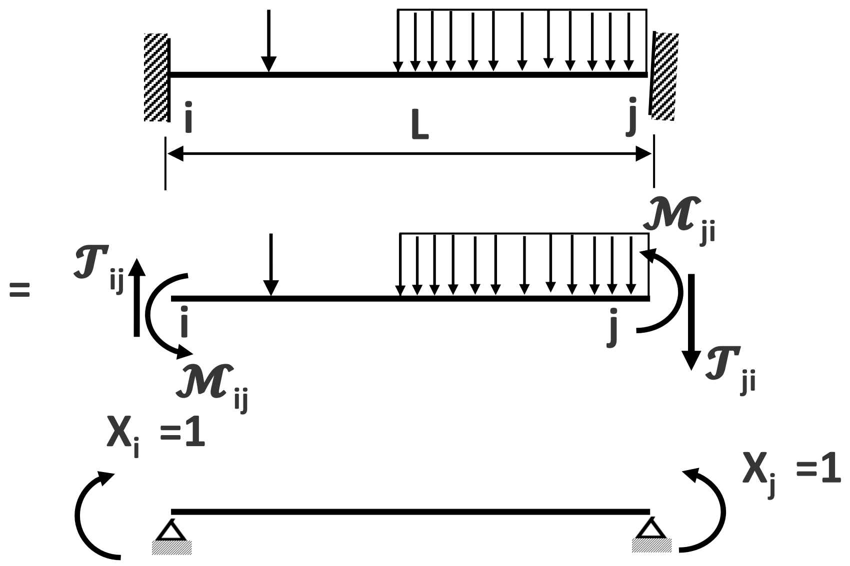




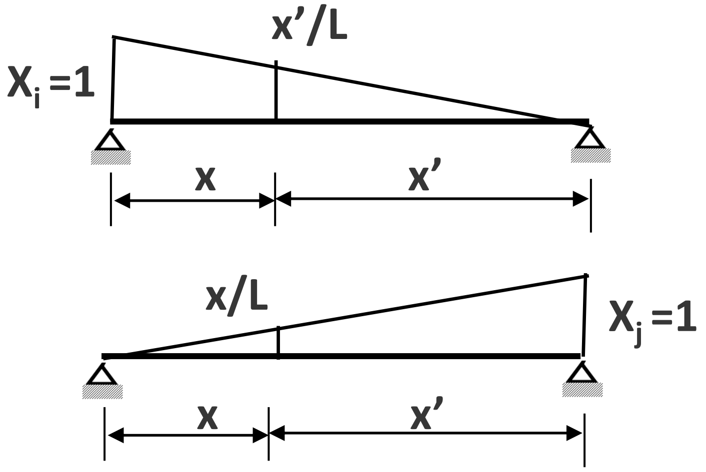


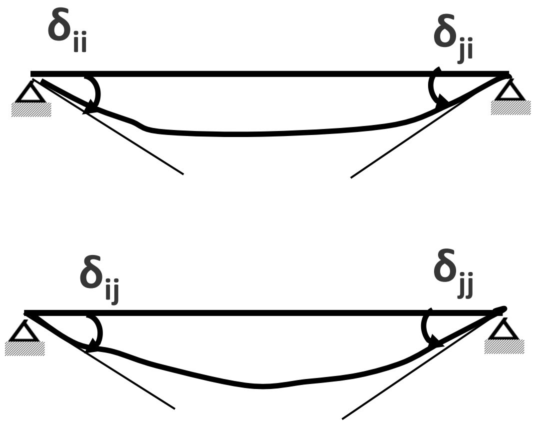
<u>ANKASTRELİK MOMENTLERİ</u> (Kuvvet Metodu, Süreklilik denklemleri yardımı ile)

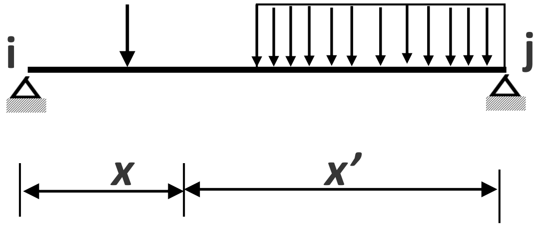
$\theta_i = \theta_j = \Delta_{ij} = \delta_{ij} = 0$ Sadece dış yük

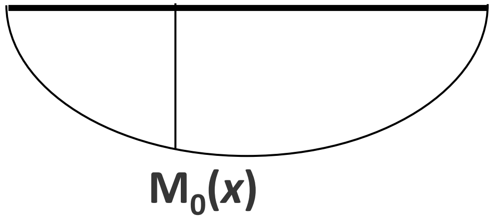


Açısal ve lineer uç deplasmanlar sıfır iken sadece dış yüklerden meydana gelen momentlere ankastrelik momentleri denir.









$$-\delta_{ii}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} + \delta_{ij}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ji} + \delta_{i0} = 0$$
$$-\delta_{ji}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} + \delta_{jj}\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ji} + \delta_{j0} = 0$$

$$\delta_{ii} = \int \frac{x'^2}{L^2}\frac{dx}{EI} \qquad \delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{xx'}{L^2}\frac{dx}{EI}$$

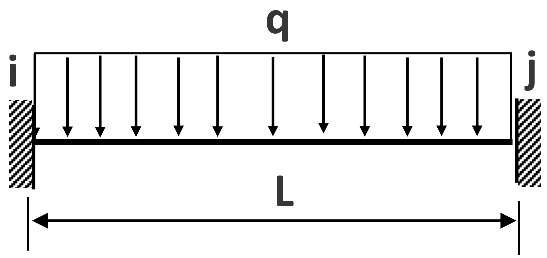
$$\delta_{jj} = \int \frac{x^2}{L^2}\frac{dx}{EI}$$

$$\delta_{i0} = \int \frac{x'}{L} M_0(x)\frac{dx}{EI} \qquad \delta_{j0} = \int \frac{x}{L} M_0(x)\frac{dx}{EI}$$

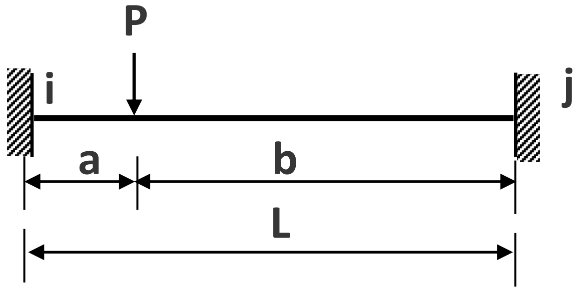
$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \frac{6}{L^2}\int M_0(x)x'dx \qquad \boldsymbol{\mathcal{R}} = \frac{6}{l^2}\int M_0(x)xdx$$

Momentler $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} = \frac{2\boldsymbol{\mathcal{L}}-\boldsymbol{\mathcal{R}}}{3} \qquad \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ji} = \frac{-2\boldsymbol{\mathcal{R}}+\boldsymbol{\mathcal{L}}}{3}$

ÖRNEKLER

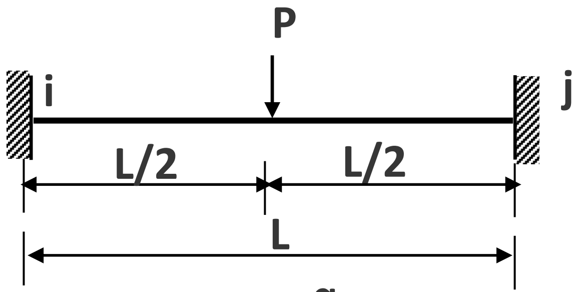


$$\mathcal{L} = \mathcal{R} = \frac{qL^2}{4} \qquad \mathcal{M}_{ij} = \frac{qL^2}{12} \qquad \mathcal{M}_{ji} = -\frac{qL^2}{12}$$



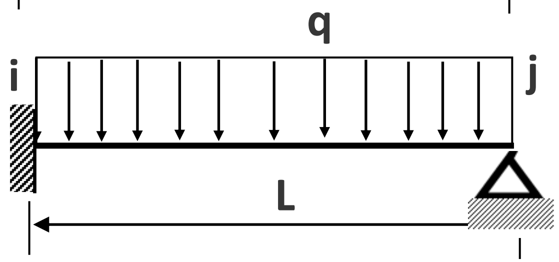
$$\mathcal{L} = \frac{Pab}{L^2}(b + L) \qquad \mathcal{R} = \frac{Pab}{L^2}(a + L)$$

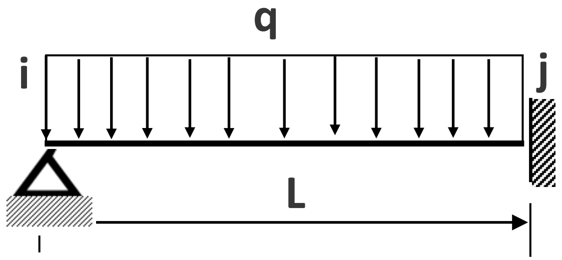
$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{Pab^2}{L^2} \qquad \mathcal{M}_{ji} = -\frac{Pba^2}{L^2}$$



$$\mathcal{L} = \mathcal{R} = \frac{3}{8}PL \qquad \mathcal{M}_{ij} = \frac{PL}{8} \qquad \mathcal{M}_{ji} = -\frac{PL}{8}$$

$$\mathcal{M}_{ij} = \frac{qL^2}{8}$$

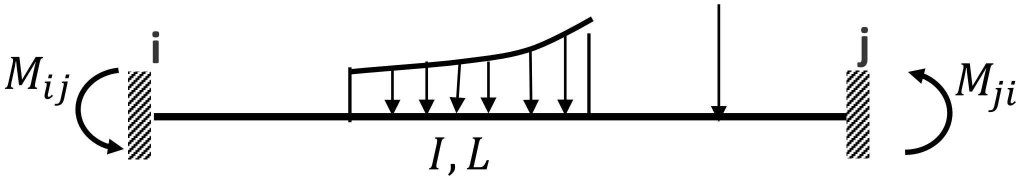


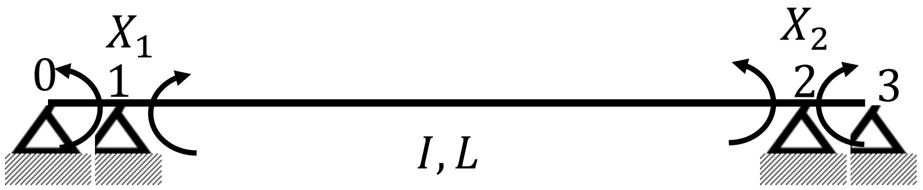


$$\mathcal{M}_{ij} = -\frac{qL^2}{8}$$

YARDIMCI BİLGİLER :

ANKASTRELİK MOMENTLERİ (Clapeyron denklemleri yardımı ile elde edilmesi):





$$X_0 = X_3 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{L}{I}X_1 + \frac{L}{I}X_2 &= -\frac{L}{I}\boldsymbol{\mathcal{L}} \\ \frac{L}{I}X_1 + 2\frac{L}{I}X_2 &= -\frac{L}{I}\boldsymbol{\mathcal{R}} \end{aligned}\right\}$$

Bu iki denklemden
(Clapeyron denklemleri)

$$X_1 = -\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\mathcal{L}} - \boldsymbol{\mathcal{R}})$$
$$X_2 = -\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\mathcal{R}} - \boldsymbol{\mathcal{L}})$$

Yönleri ile karşılaştırarak

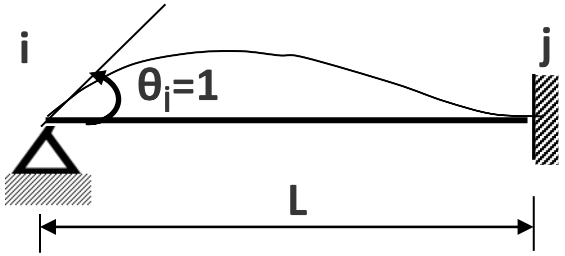
$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} &= \frac{1}{3}(2\boldsymbol{\mathcal{L}} - \boldsymbol{\mathcal{R}}) \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ji} &= -\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\mathcal{R}} - \boldsymbol{\mathcal{L}}) \end{aligned}}$$

elde edilir.

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ :

Bir çubuğun ucunda birim deplasman meydana getiren uç kuvvetlere birim deplasman sabitleri denir.

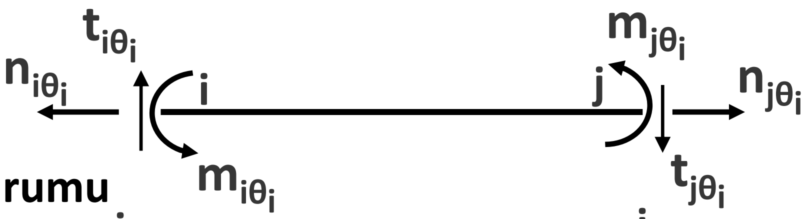
A durumu



$$\theta_i = 1 \quad \Delta = \delta = \theta_j = 0 \; Dış \; yük \; yok$$

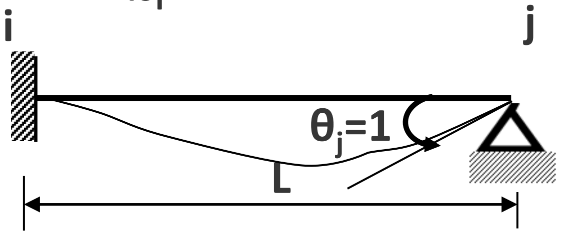
$$\theta_i = 1 \; için \; m_{i\theta_i} = i \; ucunu \; birim \; döndürmek \; için \; tatbik \; edilen \; moment$$

$$m_{j\theta_i} \;\; i \; ucunu \; birim \; döndürmek \; için \; j \; ucuna \; tatbik \; edilen \; moment$$



$$n_{i\theta_i} = n_{j\theta_i} = 0 \; dış \; yük = 0 \qquad t_{i\theta_i} = t_{j\theta_i} = \frac{m_{i\theta_i} + m_{j\theta_i}}{L}$$

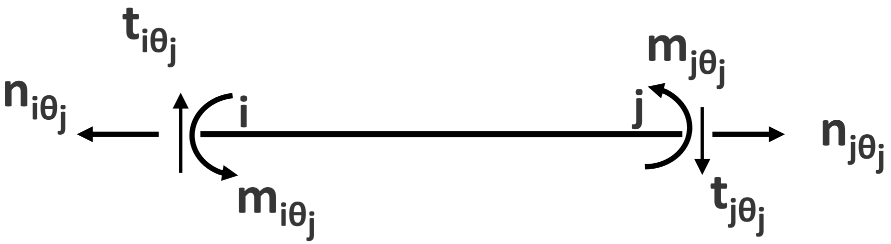
B durumu



$$\theta_j = 1 \quad \Delta = \delta = \theta_i = 0 \; Dış \; yük \; yok$$

$$\theta_j = 1 \; için \; m_{i\theta_j} = j \; ucunu \; birim \; döndürmek \; için \; i \; ye \;\; tatbik \; edilen \;\; moment$$

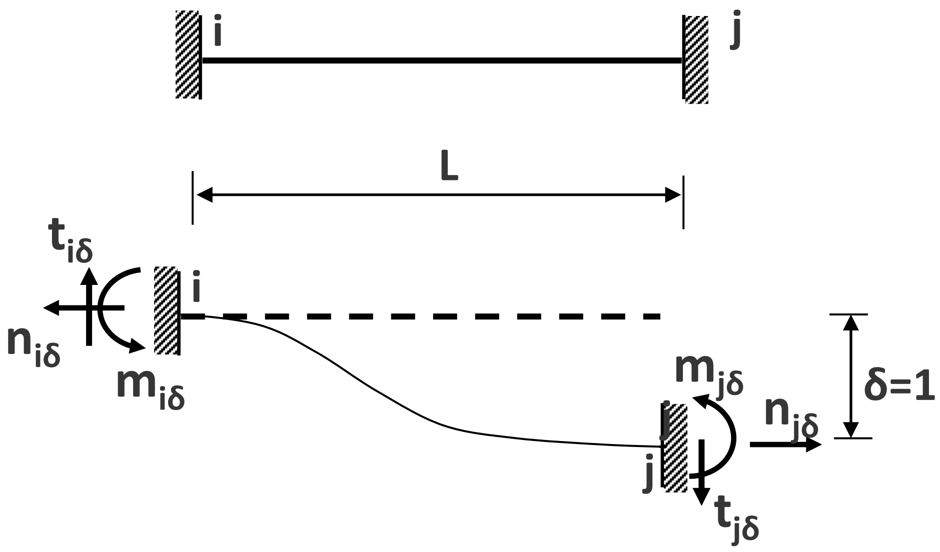
$$m_{j\theta_j} \;\; j \; ucunu \; birim \; döndürmek \; için \; j \; ucuna \; tatbik \; edilen \; moment$$



$$n_{i\theta_j} = n_{j\theta_j} = 0 \; dış \; yük = 0 \qquad t_{i\theta_j} = t_{j\theta_j} = \frac{m_{i\theta_j} + m_{j\theta_j}}{L}$$

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ :

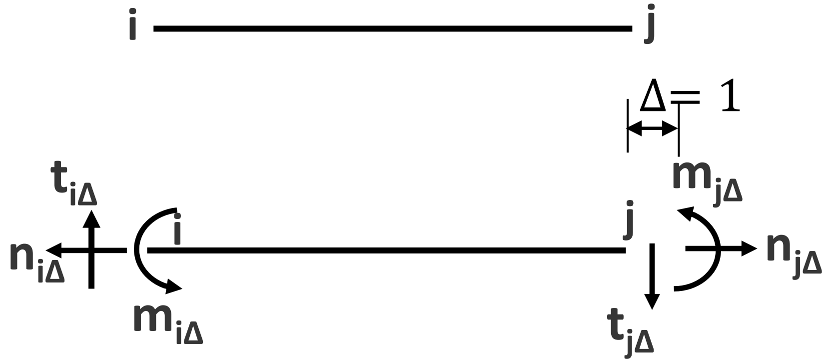
C durumu



$$\delta = 1 \quad \theta_i = \theta_j = \Delta = 0 \qquad Dış\ yük\ yok$$

$$n_{i\delta} = n_{j\delta} = 0 \quad t_{i\delta} = t_{j\delta} = \frac{m_{i\delta} + m_{j\delta}}{L}$$

D durumu

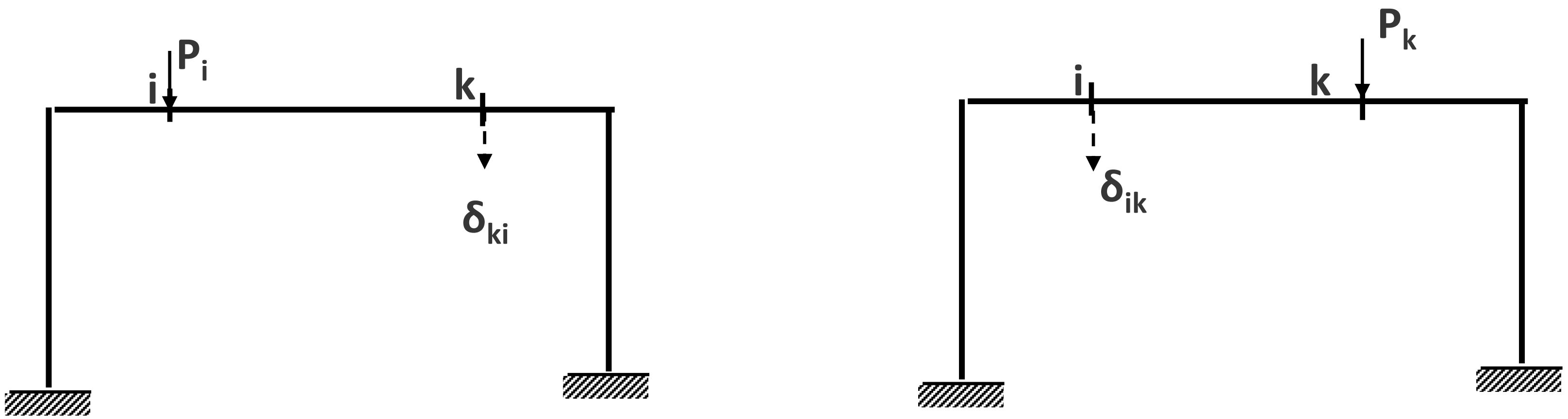


$$\Delta = 1 \quad \theta_i = \theta_j = \delta = 0 \qquad Dış\ yük\ yok$$

$$n_{i\Delta} = n_{j\Delta} \quad t_{i\Delta} = t_{j\Delta} = m_{i\Delta} = m_{j\Delta} = 0$$

BETTİ KARŞITLIK TEOREMİ

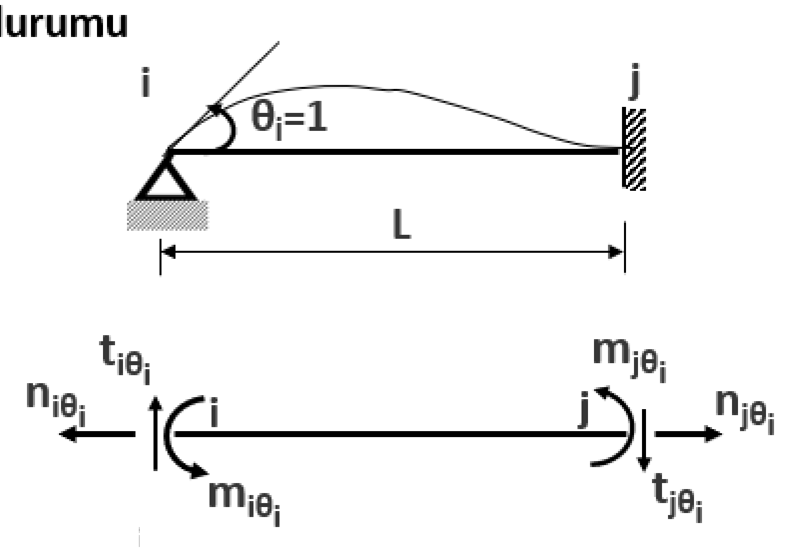
Doğrusal elastik bir sisteme etkiyen iki yükleme durumunda birincinin ikinciye ait yer değiştirmelerde yaptığı işin ikincinin birinci ye ait yer değiştirmelerde yaptığı işe eşit olduğunu ifade eder.

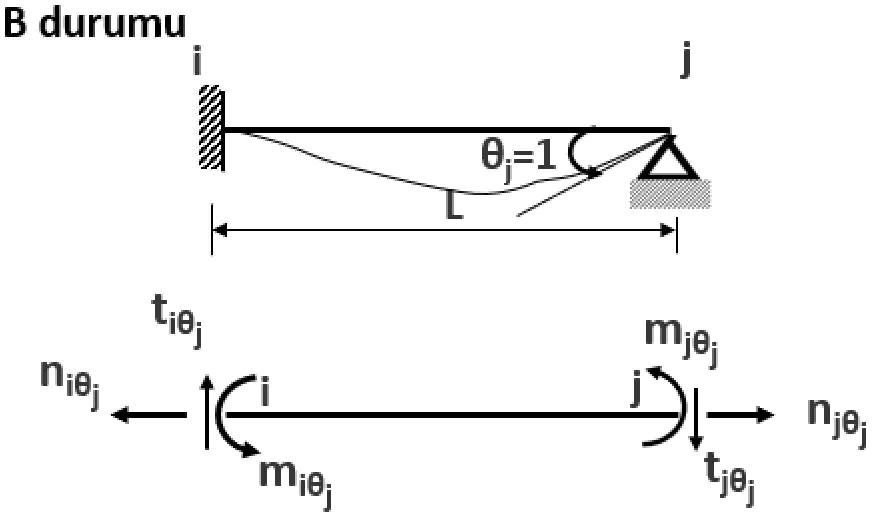


$$P_i \delta_{ik} = P_k \delta_{ki}$$

$$P_i = P_k = 1 \; ise \; \delta_{ik} = \delta_{ki}$$

Yukarıda tarif edilen dört durumda 6 şar dan 24 tane birim deplasman sabiti bulunmaktadır. Bunlardan 6 tane (n), 2 tane (m) ve 2 tane (t) sabiti sıfırdır ve aralarında 7 tane de dengeyi ifade eden bağıntı vardır. Bu sabitler arasında Betti karşıtlık teoremi ile ifade edeceğimiz üç bağıntı bulunmaktadır





Önce A durumu yükleme B durumu deformasyon durumu kabul edelim

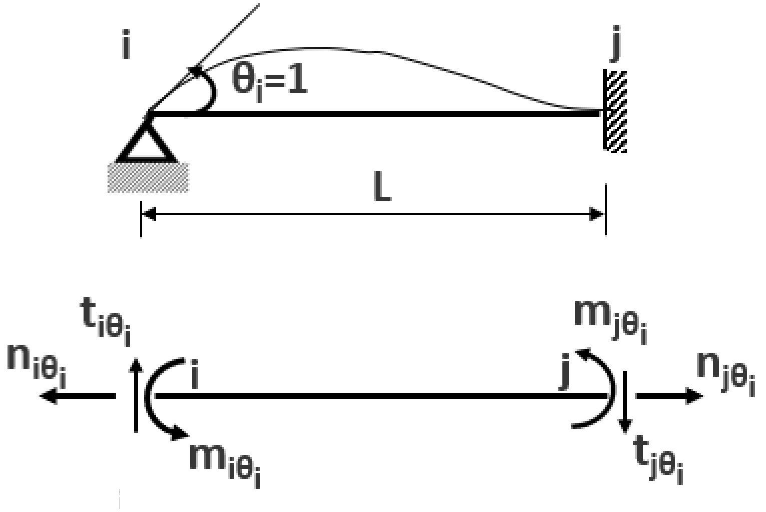
$$m_{j\theta_i} * 1 = Dış\ kuvvetlerin\ yaptığı\ iş$$

A durumu deformasyon B durumu yükleme durumu olursa

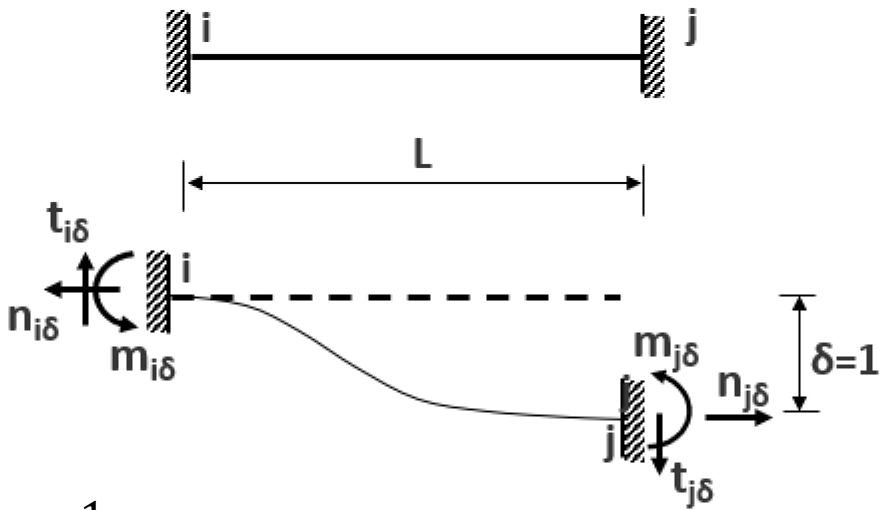
$$m_{i\theta_j} * 1 = Dış\ kuvvetlerin\ yaptığı\ iş$$

$$m_{j\theta_i} = m_{i\theta_j}$$

A durumu



C durumu



A ve C durumlarının karşılaştırılmasında $t_{j\theta_i} * 1 = m_{i\delta} * 1$

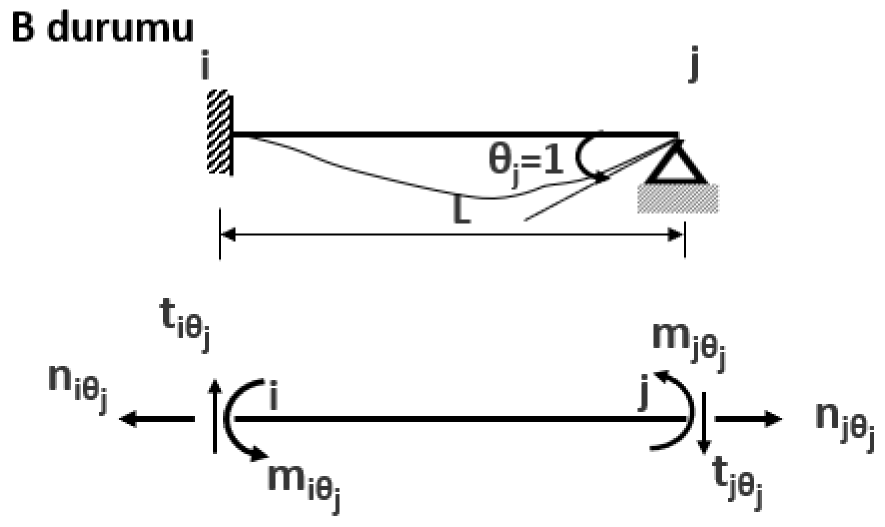
$C\ durumundaki\ m_{i\delta}\ A\ durumunda\ \theta_i = 1\ e\ karşı$

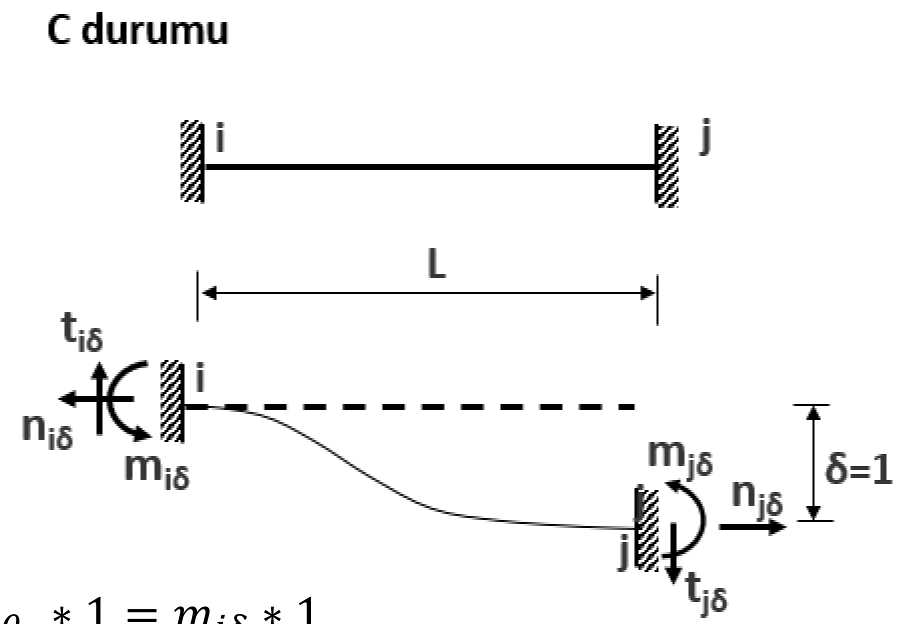
A $durumundaki\ t_{j\theta_i}\ C\ durumunda\ \ \delta = 1\ e\ karşı$

$A\ durumu\ ile\ B\ durumu\ karşılaştırılırsa\quad m_{i\theta_j} = m_{j\theta_i}$

$A\ durumu\ ile\ C\ durumu\ karşılaştırılırsa\quad m_{i\delta} = t_{j\theta_i}$

$B\ durumu\ ile\ C\ durumu\ karşılaştırılırsa\quad m_{j\delta} = t_{j\theta_j}$





B ve C durumlarının karşılaştırılmasında $t_{j\theta_j} * 1 = m_{j\delta} * 1$

$C\ durumundaki\ m_{j\delta}\ B\ durumunda\ \theta_j = 1\ e\ karşı$

$B\ durumundaki\ t_{j\theta_j}\ C\ durumunda\ \ \delta = 1\ e\ karşı$

$A\ durumu\ ile\ B\ durumu\ karşılaştırılırsa\quad m_{i\theta_j} = m_{j\theta_i}$

$A\ durumu\ ile\ C\ durumu\ karşılaştırılırsa\quad m_{i\delta} = t_{j\theta_i}$

$B\ durumu\ ile\ C\ durumu\ karşılaştırılırsa\quad m_{j\delta} = t_{j\theta_j}$

Burada elde edilen üç bağıntı da ilave edilirse 24 tane birim deplasman sabitinden 4 tanesinin bağımsız olduğu görülür.

$m_{i\theta_i}, m_{i\theta_j}. m_{j\theta_j}, n_{i\Delta}$ birim deplasman sabitleri bağımsız olarak seçilirse. Diğer bağıntılar bunlara bağlı olarak elde edilebilir.

Bu bağıntıları hatırlamak için θ dönmesine m momentinin ve δ deplasmanına da t kuvvetinin karşı geldiği düşünülerek, bir tarafta üst te bulunan kuvvete karşı gelen deplasmanı diğer tarafta altta yazmak yeterli olacaktır.

$$\boxed{t_j}\ \boxed{\theta_i} = \boxed{m_i}\ \boxed{\delta}$$

$$Denge\ denklemleri\ ile\ elde\ edilenler$$

$$n_{i\theta_i} = n_{j\theta_i} = 0 \qquad n_{i\theta_j} = n_{j\theta_j} = 0 \qquad n_{i\delta} = n_{j\delta} = 0$$

$$t_{i\theta_i} = t_{j\theta_i} = \frac{m_{i\theta_i} + m_{j\theta_i}}{L} \qquad t_{i\theta_j} = t_{j\theta_j} = \frac{m_{i\theta_j} + m_{j\theta_j}}{L} \qquad t_{i\,\delta} = t_{j\delta} = \frac{m_{i\delta} + m_{j\delta}}{L}$$

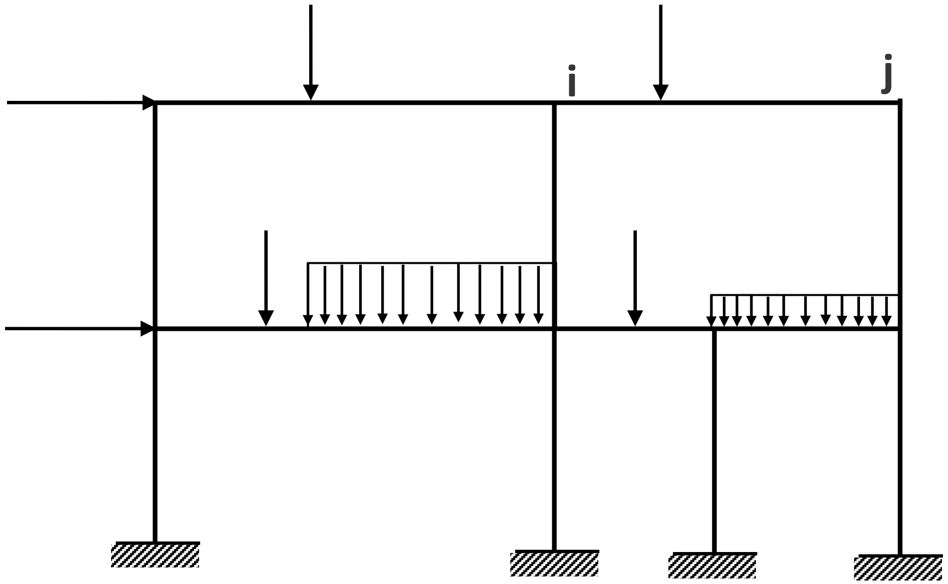
$$m_{i\Delta} = m_{j\Delta} = t_{i\Delta} = t_{j\Delta} = 0$$

$$Betti\ teoremi\ ile\ elde\ edilenler$$

$$m_{j\theta_i} = m_{i\theta_j}$$

$$m_{i\delta} = t_{j\theta_i} = \frac{m_{i\theta_i} + m_{j\theta_i}}{L} \qquad m_{j\delta} = t_{j\theta_j} = \frac{m_{i\theta_j} + m_{j\theta_j}}{L}$$

DOĞRUSAL ÇUBUKLARDA UÇ KUVVETLERİ İLE DEPLASMANLAR ARASINDAKİ BAĞINTILAR

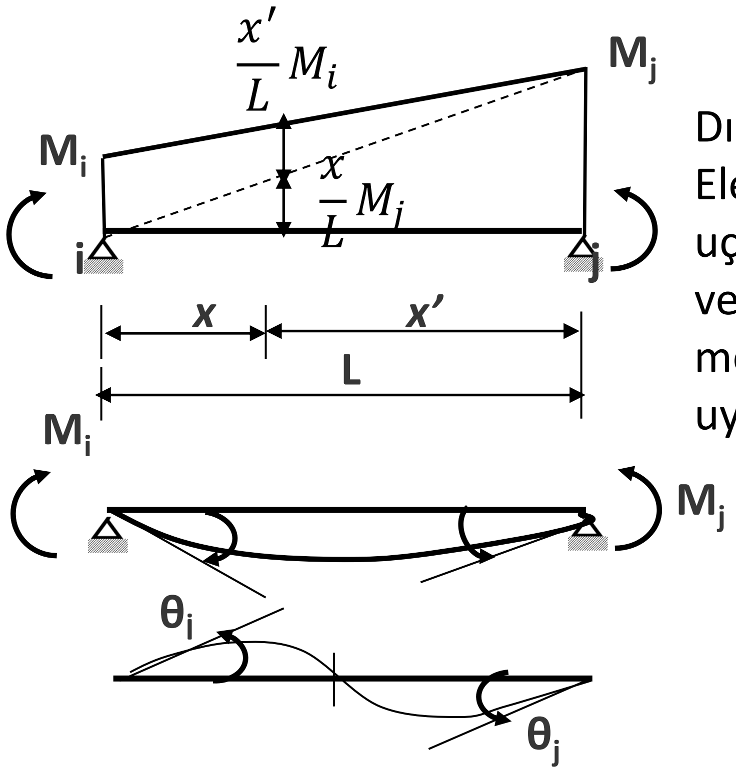


$$M_{ij} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} + m_{i\theta_i}\theta_i + m_{i\theta_j}\theta_j + m_{i\delta}\,\delta \;\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$M_{ji} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ji} + m_{j\theta_i}\theta_i + m_{j\theta_j}\theta_j + m_{j\delta}\,\delta \;\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$
$$T_{ij} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{ij} + t_{i\theta_i}\theta_i + t_{i\theta_j}\theta_j + t_{i\delta}\,\delta \;\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$
$$T_{ji} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{ji} + t_{j\theta_i}\theta_i + t_{j\theta_j}\theta_j + t_{j\delta}\,\delta \;\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$
$$N_{ij} = \boldsymbol{\mathcal{N}}_{ij} + n_{i\Delta}\Delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$
$$N_{ji} = \boldsymbol{\mathcal{N}}_{ji} + n_{j\Delta}\Delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

3 ve 4 denklemleri yerine aşağıdaki bağıntılar kullanabilir.

$$T_{ij} = T_{0_{ij}} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} \ldots\ldots\ldots 3' \qquad T_{ji} = T_{0_{ji}} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L} \ldots\ldots\ldots 4'$$

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİNİN HESABI (Kuvvet Metodu, Süreklilik denklemleri yardımı ile**)**



Dış yük=0
Eleman uçlarına M_i ve M_j uç momentleri uygulanıyor.

$$-\theta_i = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx + \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\theta_j = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx + \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\theta_i = 1 \qquad \theta_j = 0 \;\; için \;\; M_i = -m_{i\theta_i} \;\; M_j = m_{j\theta_i}$$

2 denkleminden

$$\frac{m_{j\theta_i}}{m_{i\theta_i}} = \frac{\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx}{\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

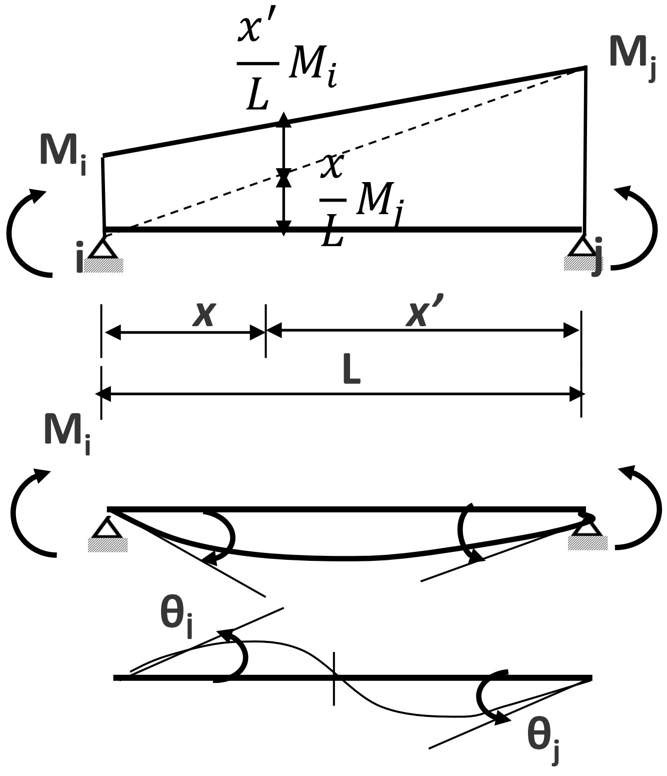
1 denkleminde yerine konursa

$$m_{i\theta_i} = \frac{L^2\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx}{\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx * \int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx - \left(\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx\right)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

θ_i ve θ_j Çubuğun ucunu saat akrebinin tersi yönünde döndürürse pozitif kabul edilir

$$\delta_{ii} = \int \frac{x'^2}{L^2}\frac{dx}{EI} \qquad \delta_{ij} = \delta_{ji} = \int \frac{xx'}{L^2}\frac{dx}{EI}$$

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİNİN HESABI
(Mohr Teoremi ile)



θ_i ve θ_j Çubuğun ucunu saat akrebinin tersi yönünde döndürürse pozitif kabul edilir

L açıklıklı *i j* basit kiriş göz önüne alalım. *İ* ve *j* uçlarında M_i ve M_j momentlerini uygulayalım, bunların işaretleri eğime momenti işaretlerinin aynısı olsun. Yani M_i , *i* deki uç momenti ile zıt, M_j de *j* deki uç momenti ile aynı işaretlidir. *x* kesitindeki eğilme moment.

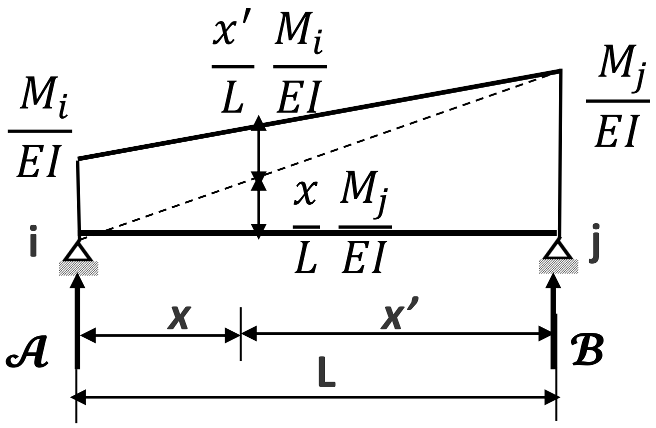
$$\boldsymbol{M_x = \frac{x'}{L}M_i + \frac{x}{L}M_j}$$

$$\theta_i \; ve \; \theta_j \;\; dönmelerini \; hesaplamak \; için \; Mohr \; teoremini \; uygulayalım$$

$$Bunun \; için \; basit \; kirişe \; \frac{M_x}{EI} \; yı \; yük \; olarak \; uygularız.$$

$$i \; mesnetindeki \; reaksiyon \; kuvveti \; -\theta_i \; ye$$

$$j \; mesnetindeki \; reaksiyon \; kuvveti + \theta_j \; ye \; eşit \; olur.$$



θ_i *ve* θ_j *dönmelerini hesaplamak için*

Mohr teoremini

uygulayalım

Bunun için basit kirişe $\frac{M_x}{EI}$ *yı yük olarak uygularız.*

i mesnetindeki reaksiyon kuvveti $-\theta_i$ *ye*

j mesnetindeki reaksiyon kuvveti $+\theta_j$ *ye eşit olur*

$$\mathcal{A} * L + \frac{M_i}{L}\int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx + \frac{M_j}{L}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx = 0 \rightarrow \mathcal{A} = -\theta_i = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx + \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx \quad \ldots\ldots(1)$$

$$\mathcal{A} = -\theta_i \quad \mathcal{B} = \theta_j$$

$$\mathcal{B} = \theta_j = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx - \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx \quad \ldots.(2)$$

$$-\theta_{\mathrm{i}} = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx + \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\theta_j = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx + \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$\theta_i = 1 \qquad \theta_j = 0 \;\; için \;\; M_i = -m_{i\theta_i} \;\; M_j = m_{j\theta_i}$$

2 denkleminden

$$\frac{m_{j\theta_i}}{m_{i\theta_i}} = \frac{\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx}{\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots(3)$$

1 denkleminde yerine konursa

$$m_{i\theta_i} = \frac{L^2\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx}{\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx * \int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx - (\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\theta_j = 1 \qquad \theta_i = 0 \; olduğu \; zaman \;\; M_i = -m_{i\theta_j} \qquad M_j = m_{j\theta_j}$$

1 ve 2 den $$m_{i\theta_j} = \frac{L^2 \int_0^L \frac{x'^2}{EI} dx}{\int_0^L \frac{x^2}{EI} dx * \int_0^L \frac{x'^2}{EI} dx - (\int_0^L \frac{xx'}{EI} dx)^2} \quad \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$m_{j\theta_j} = \frac{L^2 \int_0^L \frac{xx'}{EI} dx}{\int_0^L \frac{x^2}{EI} dx * \int_0^L \frac{x'^2}{EI} dx - (\int_0^L \frac{xx'}{EI} dx)^2} \quad \ldots\ldots \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Kesitleri sabit doğru eksenli çubuklar için:

$$\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx = \frac{L^3}{3EI} \qquad \int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx = \frac{L^3}{3EI} \qquad \int_0^L \frac{xx'}{EI}dx = \int_0^L \frac{x(L-x)}{EI} = \frac{L^3}{2EI} - \frac{L^3}{3EI} = \frac{L^3}{6EI} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$(4),(5) ve\ (6) denklemlerinden\ m_{i\theta_i} = \frac{4EI}{L} \qquad m_{j\theta_j} = \frac{4EI}{L} \qquad m_{i\theta_j} = \frac{2EI}{L} \qquad m_{j\theta_i} = \frac{2EI}{L}$$

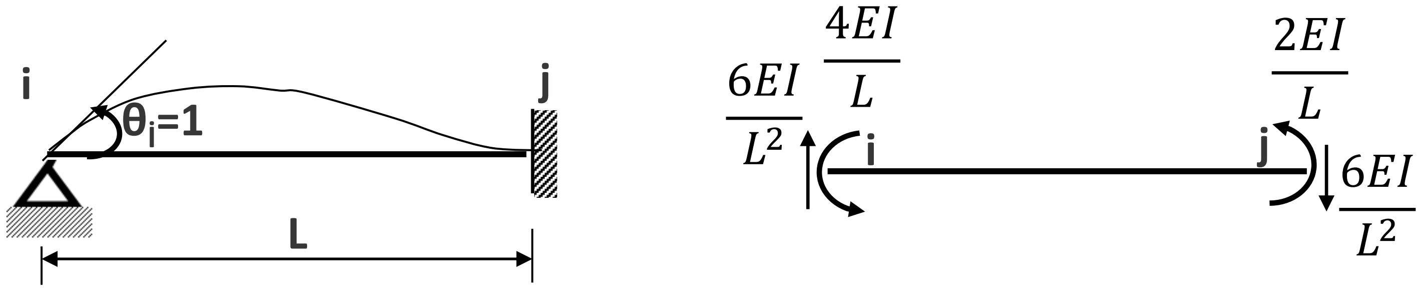
$$t_{i\theta_i} = \frac{m_{i\theta_i} + m_{j\theta_i}}{L} = \frac{\frac{4EI}{l} + \frac{2EI}{L}}{L} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$m_{i\delta} = m_{j\delta} = \frac{6EI}{L^2} \qquad n_{i\Delta} = \frac{EF}{L} \qquad \Delta = \int_0^L \frac{N}{EF}dx$$

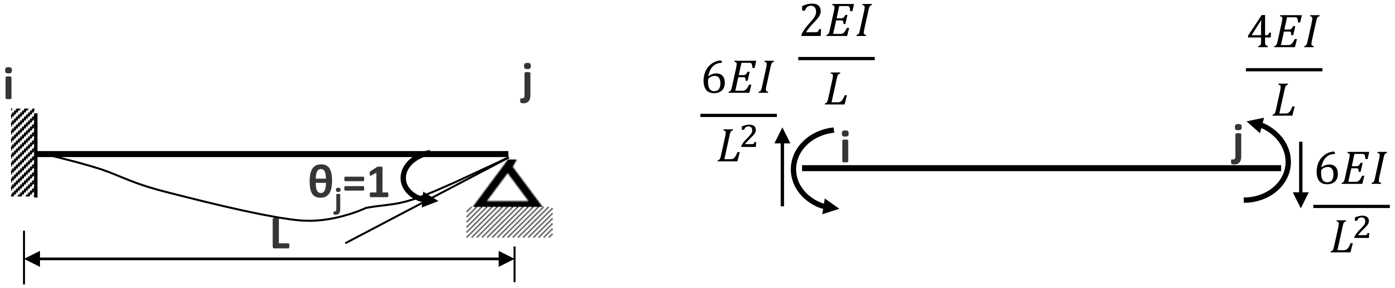
$$t_{i\delta} = t_{j\delta} = \frac{12EI}{L^3}$$

KESİTLERİ SABİT DOĞRU EKSENLİ ÇUBUKLAR İÇİN BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ

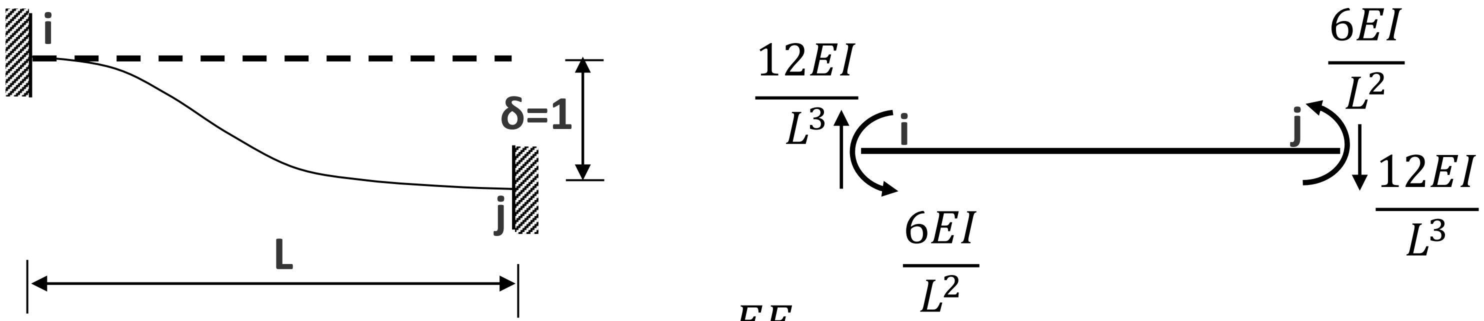
A durumu



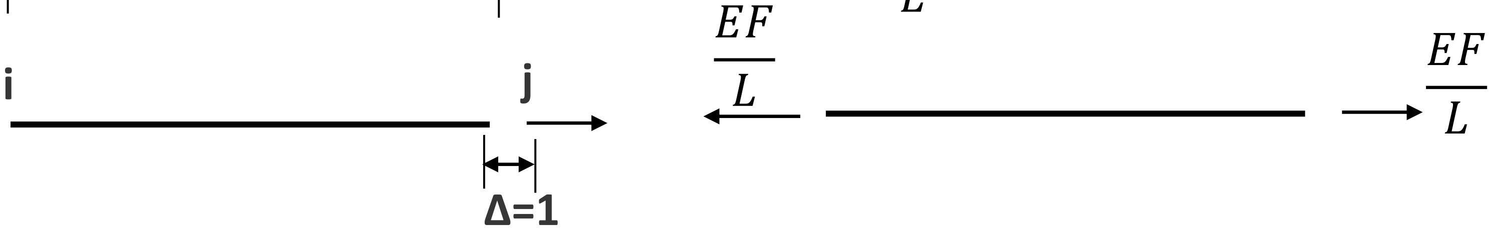
B durumu



C durumu



D durumu



BİR UCU MAFSALLI BİR ÇUBUK İÇİN BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ

$$-\theta_i = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{x'^2}{EI}dx + \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx$$

$$\theta_j = \frac{M_i}{L^2}\int_0^L \frac{xx'}{EI}dx + \frac{M_j}{L^2}\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx$$

$$\theta_i = 1$$

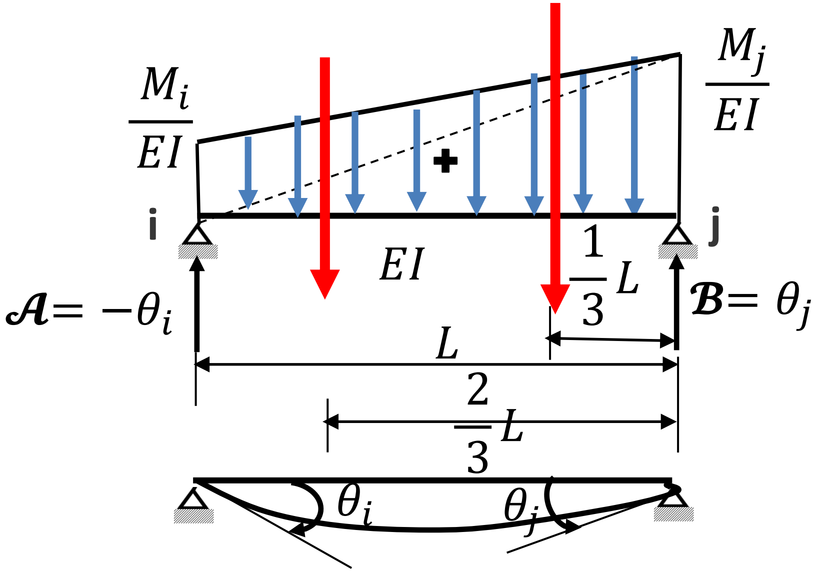
$$M_i = -\overline{m}_{i\theta_i} \quad M_j = 0$$

$$\overline{m}_{i\theta_i} = \frac{L^2}{\int_0^L \frac{x^2}{EI}dx} = \frac{L^2}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{3EI}{L}$$

$$\overline{m}_{i\theta_i} = \frac{3EI}{L}$$

$$t_{i\theta_i} = \frac{\overline{m}_{i\theta_i}}{L} = \frac{3EI}{L^2}$$

MOHR TEOREMİ İLE UÇ DÖNMELERİ HESABI (BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ)



$$\sum \mathcal{M}_j = 0 \rightarrow -\mathcal{A} * L + \frac{1}{2}\frac{M_i}{EI} L * \frac{2}{3} L + \frac{1}{2}\frac{M_j}{EI} L * \frac{1}{3} L = 0$$

$$\mathcal{A} = \frac{L}{3EI} M_i + \frac{L}{6EI} M_j$$

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{L}{2EI} M_i + \frac{L}{2EI} M_j$$

$$\mathcal{B} = \frac{L}{2EI} M_i + \frac{L}{2EI} M_j - \frac{L}{3EI} M_i - \frac{L}{6EI} M_j$$

$$\mathcal{B} = \theta_j = \frac{L}{6EI} M_i + \frac{L}{3EI} M_j$$

$$\mathcal{A} = -\theta_i = \frac{L}{3EI} M_i + \frac{L}{6EI} M_j$$

Bu denklem takımı $\theta_i = 1$ ve $\theta_j = 0$ için denklem takımı çözülürse

$$M_i = -\frac{4EI}{L} \qquad M_j = \frac{2EI}{L}$$

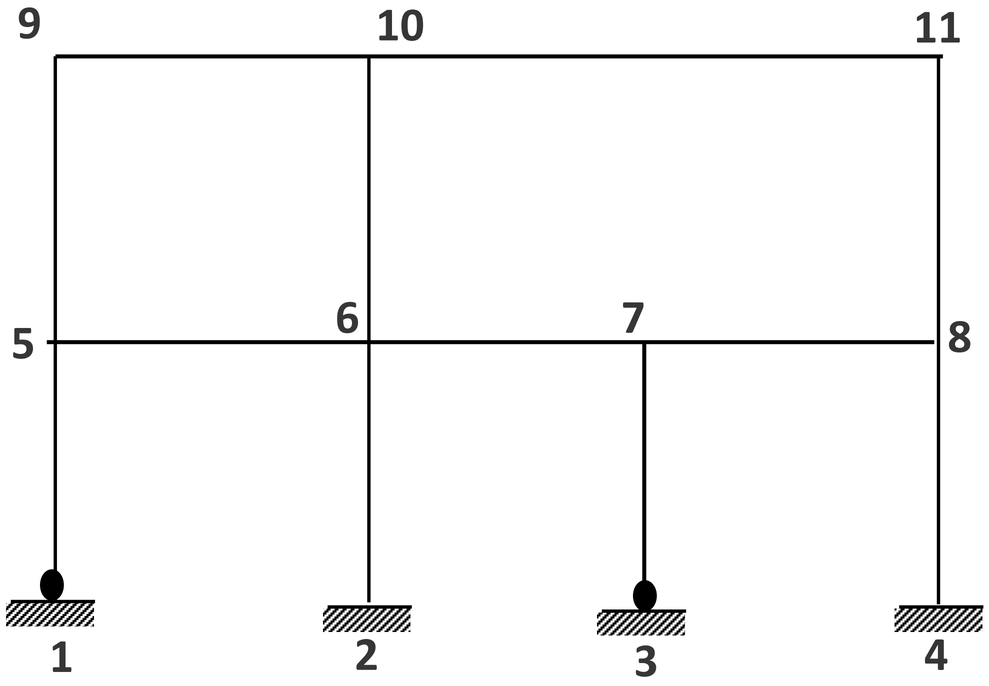
Deplasman metotlarındaki işaretleri ile birim deplasman sabitlerini yazarsak

$$m_{i\theta_i} = \frac{4EI}{L} \qquad m_{j\theta_i} = \frac{2EI}{L}$$

$Aynı\ denklem\ takımı\ \ \theta_i = 0\ ve\ \theta_j = 1\ için\ \ çözülürse$

$$m_{j\theta_j} = \frac{4EI}{L} \qquad m_{ij} = \frac{2EI}{L}$$

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ İÇİN UYGULAMA



$$\overline{m}_{5\theta_5}^{51} = \frac{3EI}{L} \qquad \overline{t}_{5\theta_5}^{51} = \frac{3EI}{L^2}$$

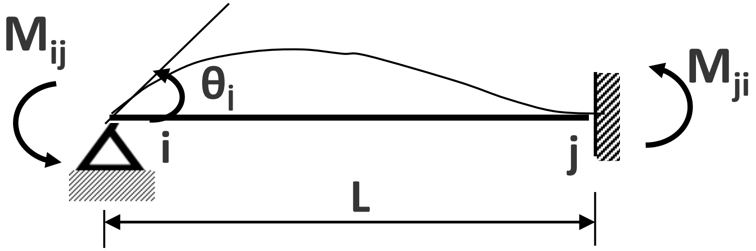
$$m_{6\theta_6}^{62} = \frac{4EI}{L} \qquad t_{6\theta_6}^{62} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$m_{5\theta_5}^{59} = \frac{4EI}{L} \qquad m_{1\theta_1}^{15} = 0$$

$$m_{10\theta_{10}}^{1011} = \frac{4EI}{L} \qquad t_{9\delta}^{59} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$\overline{m}_{7\theta_7}^{73} = \frac{3EI}{L}$$

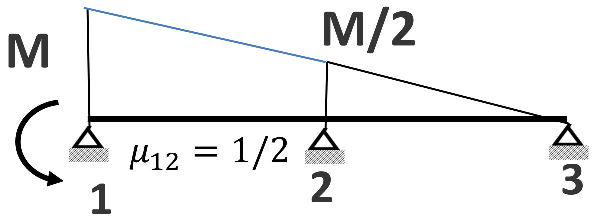
GEÇİŞ KATSAYILARI



$$\mu_{ij} = \frac{M_{ji}}{M_{ij}} \qquad \theta_i = \frac{M_{ij}}{m_{i\theta_i}} \quad \rightarrow M_{ij} = m_{i\theta_i}\theta_i \quad M_{ji} = m_{j\theta_i}\theta_i$$

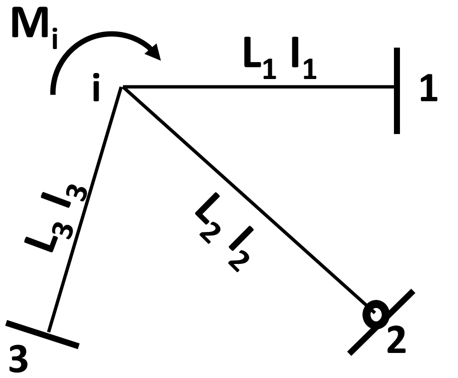
$$\mu_{ij} = \frac{M_{ji}}{M_{ij}} = \frac{m_{j\theta_i}\theta_i}{m_{i\theta_i}\theta_i} = \frac{m_{j\theta_i}}{m_{i\theta_i}}$$

Doğru eksenli ve düzgün kesitli çubuklar için:

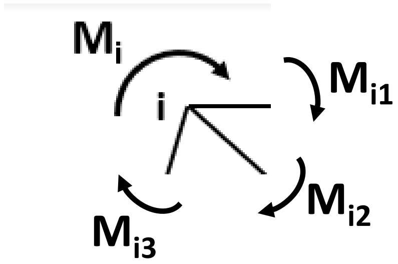


$$\mu_{ij} = \frac{\frac{2EI}{L}}{\frac{4EI}{L}} = \frac{1}{2} \qquad M_{ji} = \frac{1}{2} M_{ij}$$

DAĞITMA SAYILARI



M_i dış momentinin tesiri altında çubuklardaki M_{i1} M_{i2} ve M_{i3} uç momentlerinin hesabı :



$$M_i + M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} = 0$$

$$-M_i = M_{i1} + M_{i2} + M_{i3} \ldots\ldots (1)$$

$$\theta_i = \frac{M_{i1}}{m_{i\theta_i}^{i1}} = \frac{M_{i2}}{m_{i\theta_i}^{i2}} = \frac{M_{i3}}{m_{i\theta_i}^{i3}} = \frac{M_{i1} + M_{i2} + M_{i3}}{m_{i\theta_i}^{i1} + m_{i\theta_i}^{i2} + m_{i\theta_i}^{i3}} = -\frac{M_i}{\sum m_{i\theta_i}} \ldots . (2)$$

i1 çubuğunda : $\theta_i = \frac{M_{i1}}{m_{i\theta_i}^{i1}}$

i2 çubuğunda : $\theta_i = \frac{M_{i2}}{m_{i\theta_i}^{i2}}$

i3 çubuğunda : $\theta_i = \frac{M_{i3}}{m_{i\theta_i}^{i3}}$

$$M_{,i1} = -\frac{m_{i\theta_i}^{i1}}{\sum m_{i\theta_i}} M_i = -r_{i1} M_i$$

$$M_{,i2} = -\frac{\overline{m}_{i\theta_i}^{i2}}{\sum m_{i\theta_i}} M_i = -r_{i2} M_i$$

$$M_{,i3} == -\frac{m_{i\theta_i}^{i3}}{\sum m_{i\theta_i}} M_i = -r_{i3} M_i$$

$$M_{ij} = -r_{ij} M_i$$

$$r_{i1} + r_{i2} + r_{i3} = 1$$

r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} *Dağıtma sayıları*

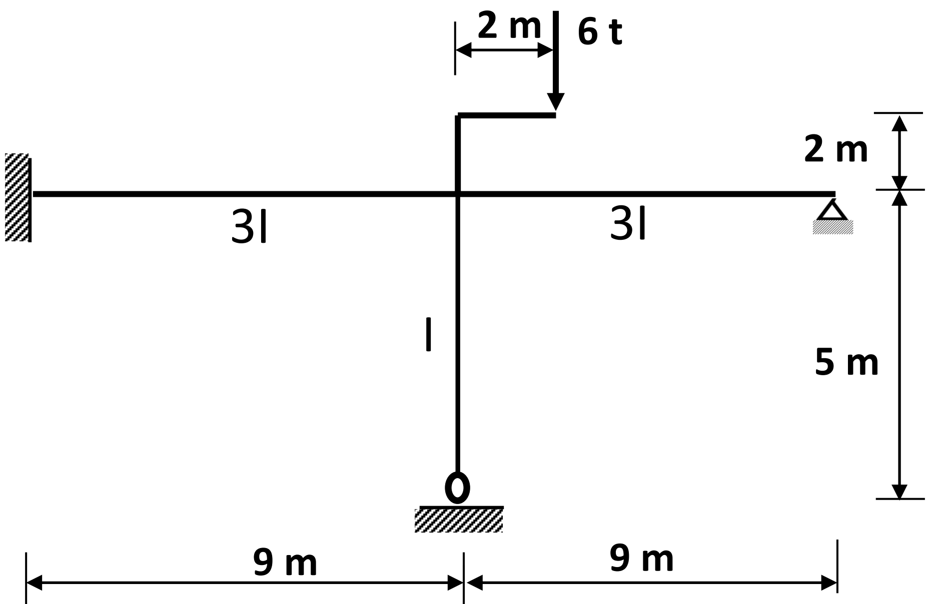
$$M_{i1} = -\frac{\overbrace{\frac{4EI_1}{L_1}}^{r_{i1}}}{\frac{4EI_1}{L_1} + \frac{3EI_2}{L_2} + \frac{4EI_2}{L_3}} M_i$$

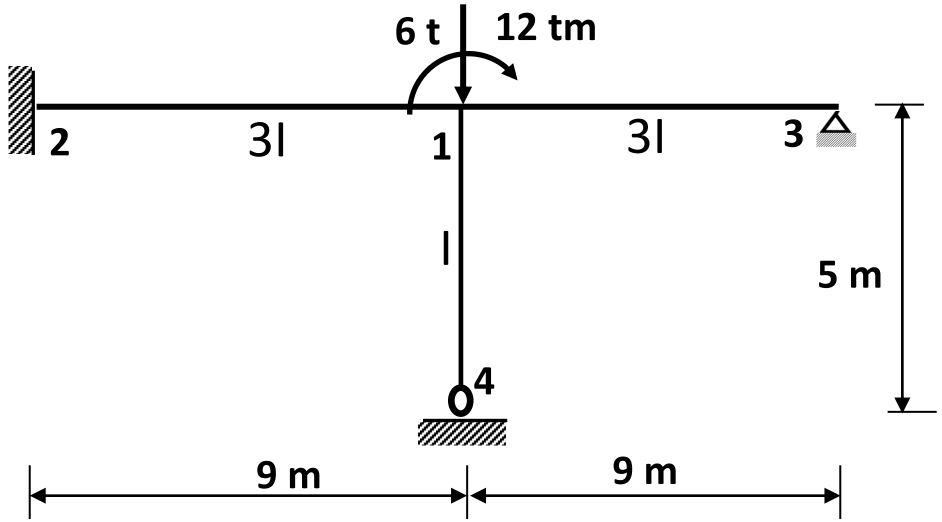
$$M_{1i} = \mu_{i1} M_{i1} = \frac{1}{2} M_{i1}$$

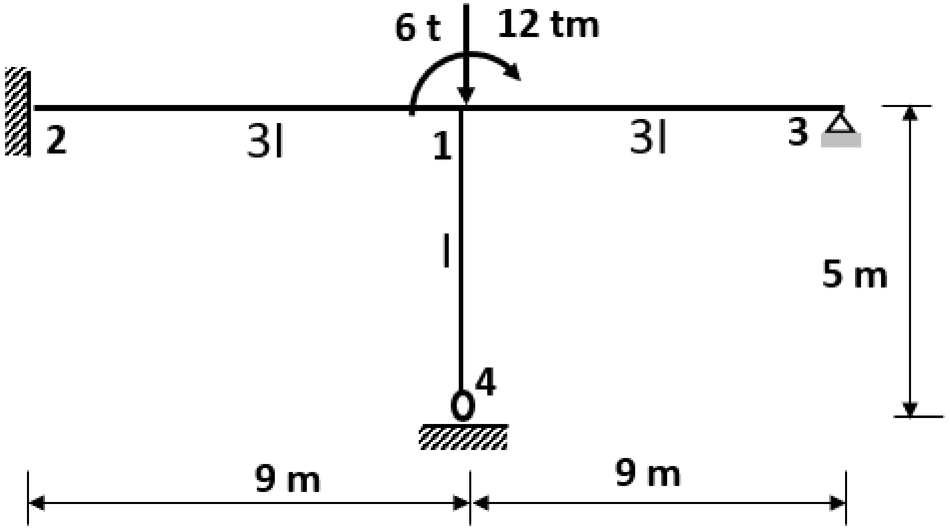
$$M_{2i} = 0$$

$$M_{3i} = \mu_{i3} M_{i3} = \frac{1}{2} M_{i3}$$

ÖRNEK







1. **DAĞITMA SAYILARI**

$$r_{12}=\frac{m_{1\theta_1}^{12}}{m_{1\theta_1}^{12}+m_{1\theta_1}^{13}+m_{1\theta_1}^{14}}=\frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{4EI}{L}+\frac{3EI}{L}+\frac{3EI}{L}}=\frac{\frac{4E3I}{9}}{\frac{4E3I}{9}+\frac{3E3I}{9}+\frac{3EI}{5}}=0.45$$

$$r_{13}=\frac{m_{1\theta_1}^{13}}{m_{1\theta_1}^{12}+m_{1\theta_1}^{13}+m_{1\theta_1}^{14}}=\frac{\frac{3E3I}{9}}{\frac{4E3I}{9}+\frac{3E3I}{9}+\frac{3EI}{5}}=0.34$$

$$r_{14}=\frac{m_{1\theta_1}^{14}}{m_{1\theta_1}^{12}+m_{1\theta_1}^{13}+m_{1\theta_1}^{14}}=\frac{\frac{3EI}{5}}{\frac{4E3I}{9}+\frac{3E3I}{9}+\frac{3EI}{5}}=0.21$$

2. KONTROL

$$r_{12} + r_{13} + r_{14} = 1 \quad 0.45 + 0.34 + 0.21 = 1$$

3. UÇ MOMENTLERİN HESABI

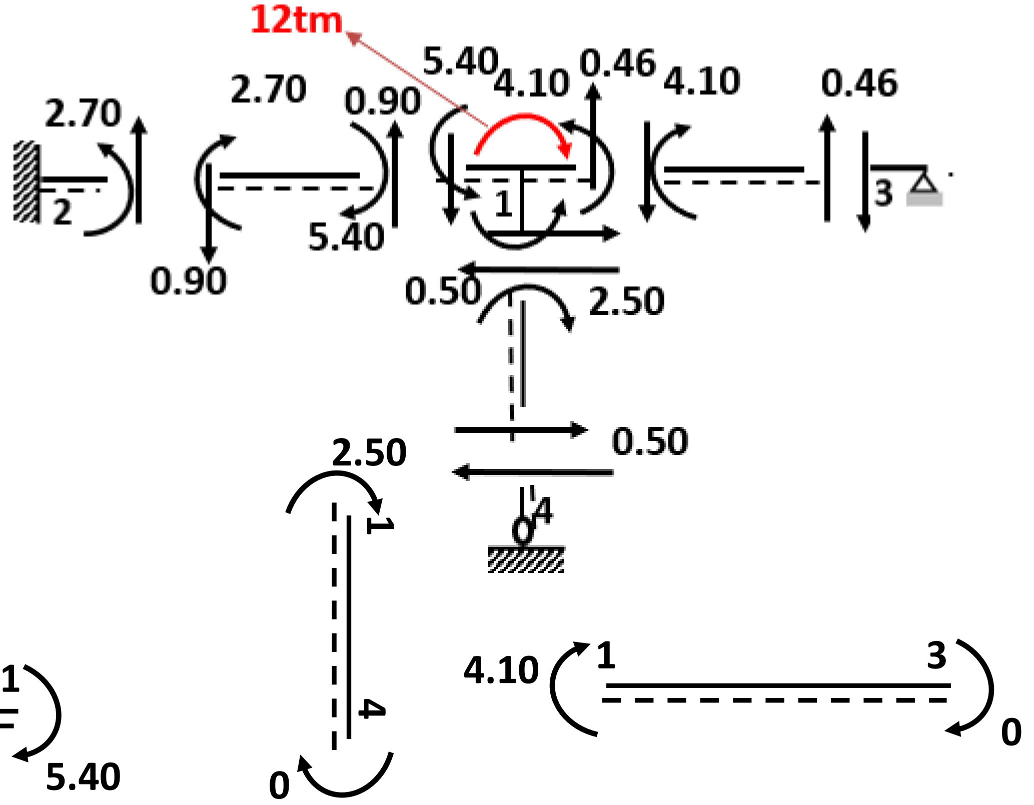
$$M_{12} = -r_{12}M_1 = -0.45 * 12 = -5.40\ tm$$

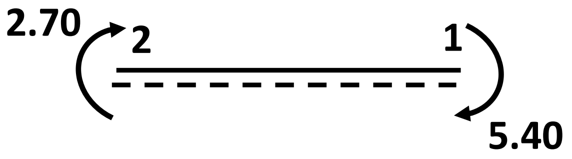
$$M_{13} = -r_{13}M_1 = -0.34 * 12 = -4.10\ tm$$

$$M_{14} = -r_{14}M_1 = -0.21 * 12 = -2.50\ tm$$

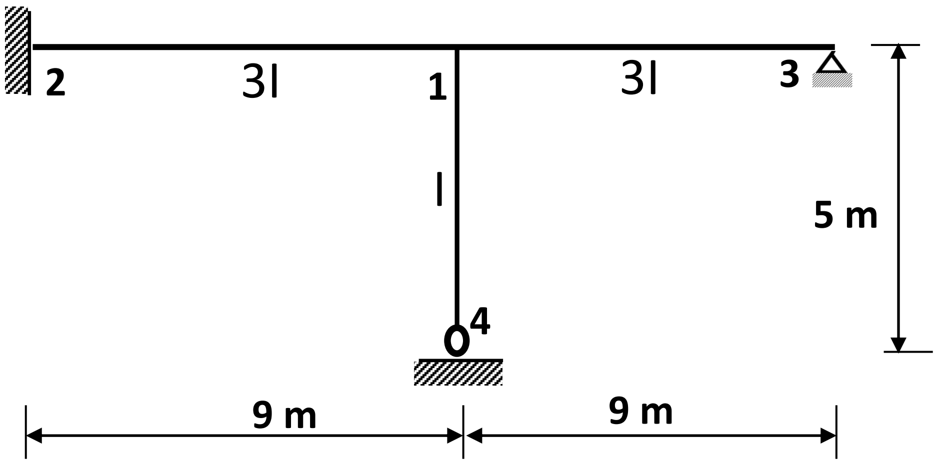
$$M_{21} = \mu_{12}M_{12} = \frac{1}{2} * (-5.40) = -2.70\ tm$$

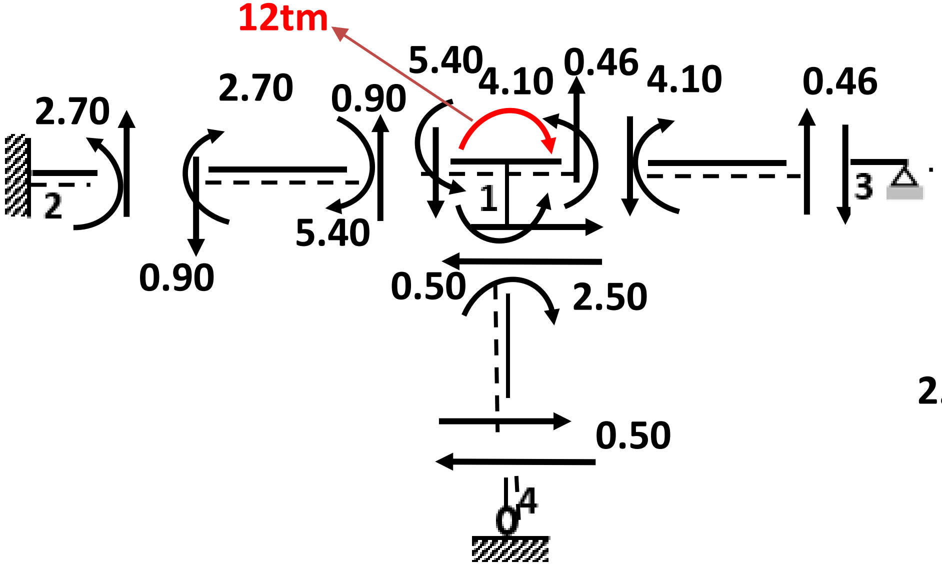
M_{31}=0 M_{41}=0





4. UÇ MOMENTLERİNİN YERLEŞTİRİLMESİ





5. UÇ KESME KUVVETLERİNİN HESABI

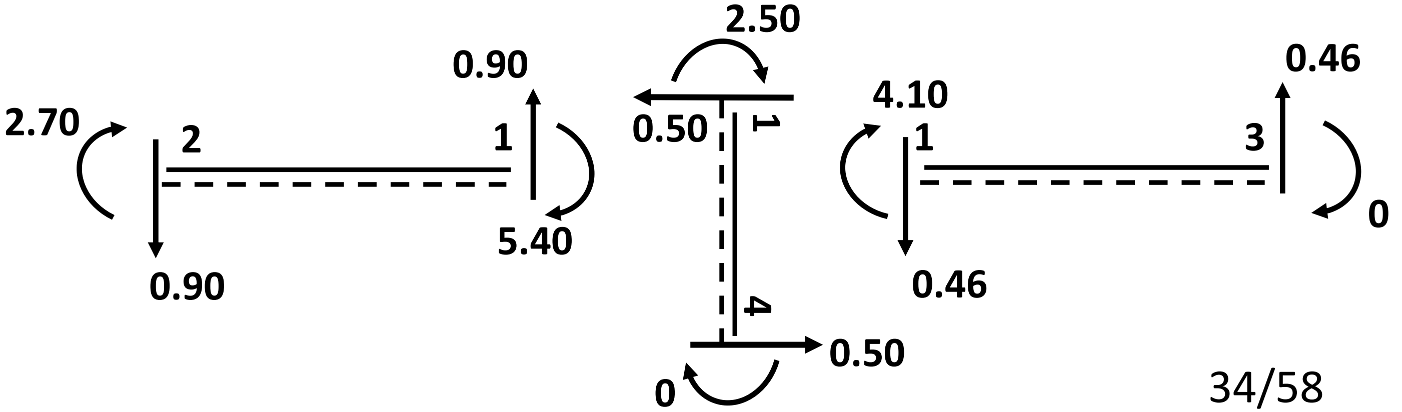
$$T_{ij} = T_{0ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

$$T_{12} = 0 + \frac{M_{12} + M_{21}}{L} = \frac{-5.40 - 2.70}{9} = -0.9\ t$$

$$T_{21} = -0.90\ t \quad T_{13} = 0 + \frac{M_{13} + M_{31}}{L} = \frac{-4.10 + 0}{9} = -0.46\ t$$

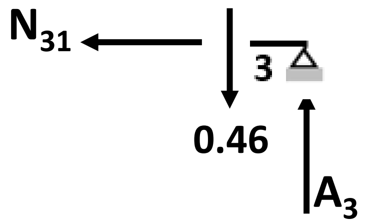
$$T_{31} = -0.46\ t \quad T_{14} = 0 + \frac{M_{14} + M_{41}}{L} = \frac{-2.50 + 0}{5} = -0.50\ t$$

$$T_{41} = -0.50\ t$$

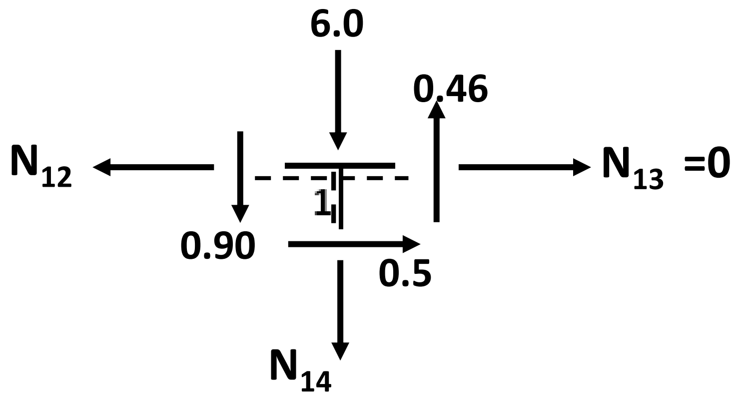


6. NORMAL KUVVETLERİNİN HESABI

Düğüm noktalarının dengesinden yararlanılarak belirlenir.



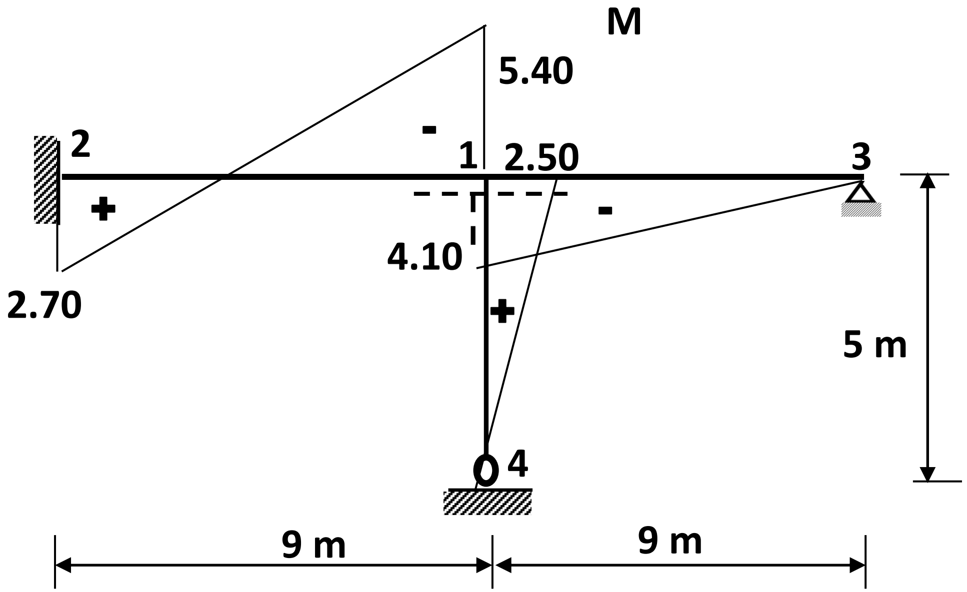
$$\sum x = 0 \quad \rightarrow N_{31} = 0 \qquad \sum y = 0 \quad \rightarrow A_3 = 0.46\ t$$

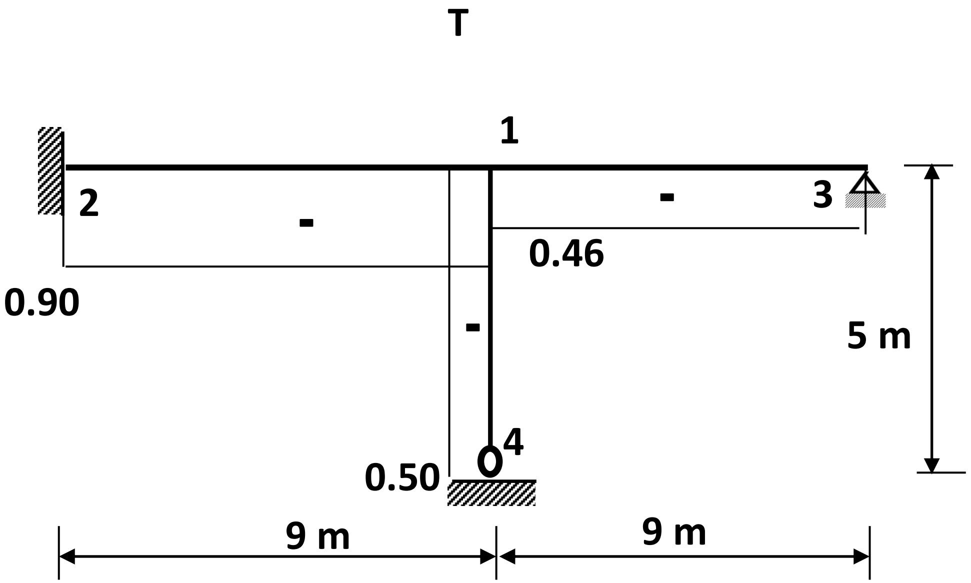


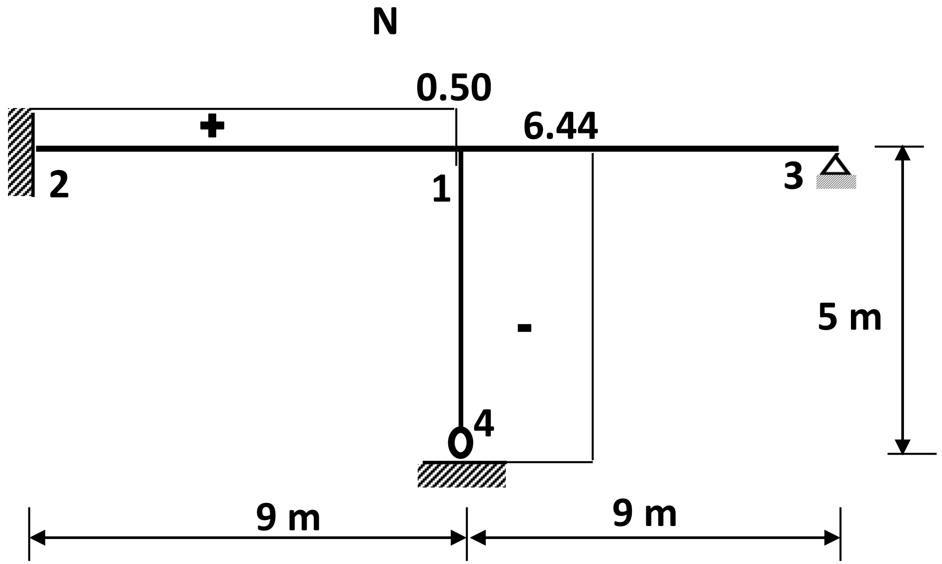
$$\sum x = 0 \quad \rightarrow -N_{12} + 0.5 = 0 \qquad N_{12} = 0.5\ t$$

$$\sum y = 0 \quad \rightarrow 0.46 - 0.9 - N_{14} - 6 = 0 \quad N_{14} = -6.44\ t$$

7. DİYAGRAMLAR







YAPI SİSTEMLERİ

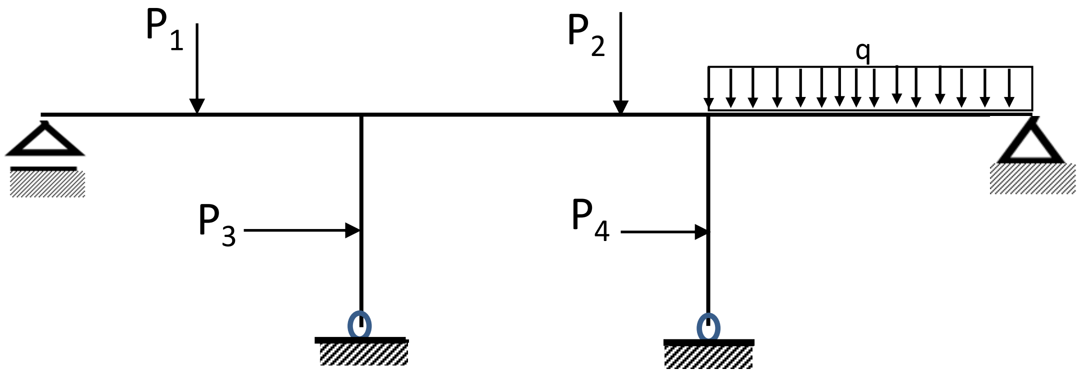
1. Düğüm noktaları sabit sistemler

$$\Delta = \delta = 0 \quad \theta \neq 0$$

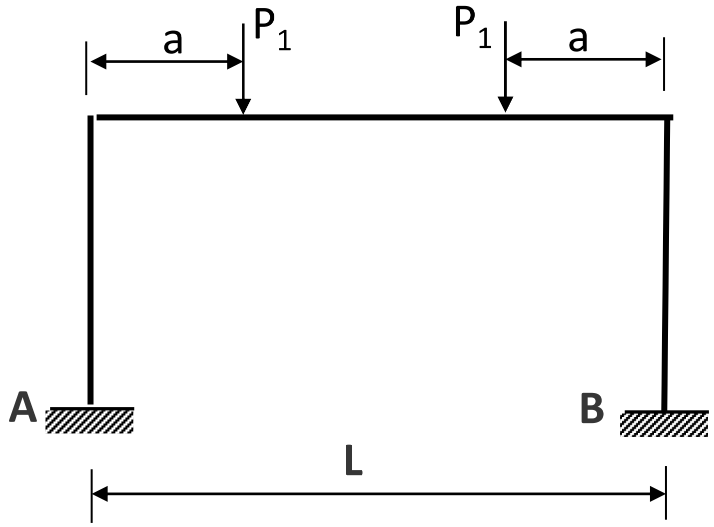
2. Düğüm noktaları hareketli sistemler

$$\Delta \neq 0 \; \delta \neq 0 \quad \theta \neq 0$$

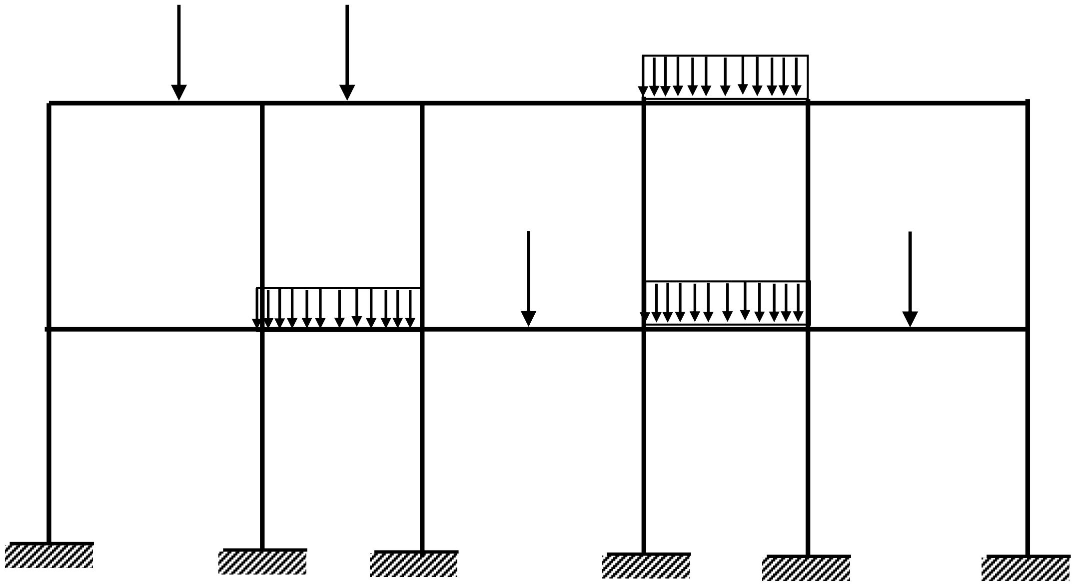
1. Düğüm noktaları sabit sistemler
   1.1) Sistemin özelliği nedeniyle bütün yüklemeler için düğüm noktaları sabit sistemler



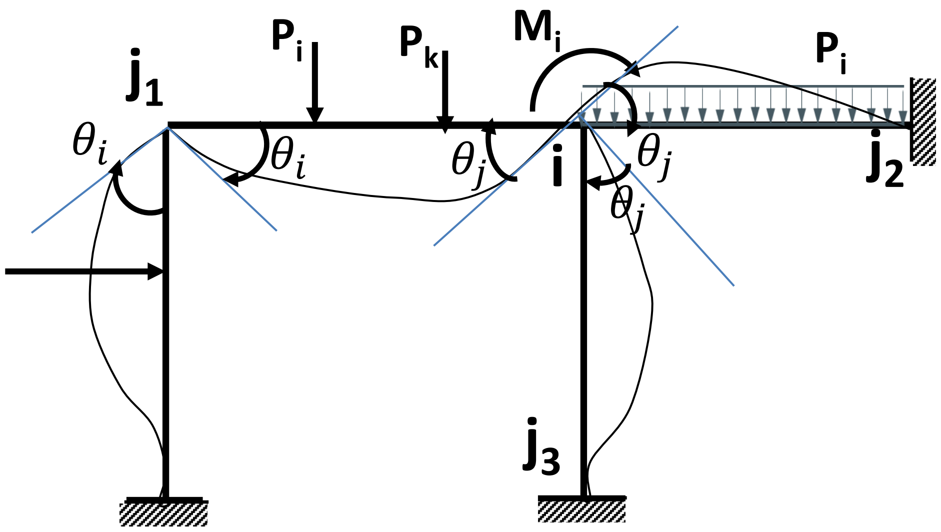
1.2) Sistemin ve yüklemenin özelliği nedeniyle düğüm noktaları sabit sistemler. Bu sistemler simetrik ve simetrik yüklere maruz sistemlerdir



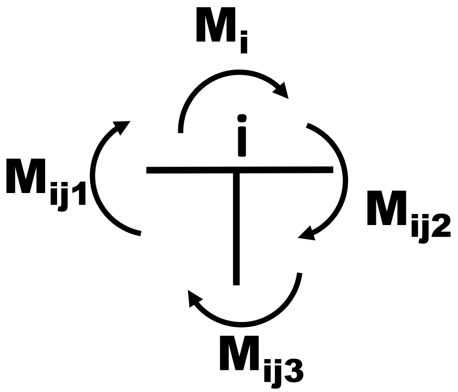
1.3) Yaklaşık olarak düğüm noktaları sabit sistemler. Düşey kolonlu düşey yüklere maruz sistemler



<u>**DÜĞÜM NOKTALARI SABİT SİSTEMLERİN AÇI METODU İLE ÇÖZÜMÜ**</u>



Bilinmeyenler rijit düğüm noktalarındaki dönme açılarıdır. Denge denklemlerinden ve geometrik uygunluk şartlarından yararlanılarak hesaplanır. Geometrik uygunluk (süreklilik) şartı düğüm noktasına birleşen çubukların uçlarındaki dönme açılarının eşit oluşudur.



$$\sum M = 0 \qquad M_i + M_{ij1} + M_{ij2} + M_{ij3} = 0$$

ÇÖZÜM İÇİN ADIMLAR :

1. Düğüm noktası denge şartının gerçekleştirilmesi

Sistemde bütün dönmeler sıfır θ=0 ve dış yükler mevcut iken i düğüm noktasına gelen moment

$$\sum \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} + M_i$$

$$\theta_i \neq 0 \; diğer \; \theta_j = 0 \; ve \; dış \; yük \; yok \; iken \quad \sum m_{i\theta_i}\theta_i = \theta_i \sum m_{i\theta_i}$$

$$\theta_i = 0 \; diğer \; \theta_j \neq 0 \; ve \; dış \; yük \; yok \; iken \quad \sum m_{i\theta_j}\theta_j$$

$$\sum \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} + M_i + \theta_i \sum m_{i\theta_i} + \sum m_{i\theta_j}\theta_j = 0$$

1.1 Ankastrelik momentlerinin hesabı
1.2 Her çubuk için birim deplasman sabitlerinin hesabı
1.3 Her rijit düğüm noktası için denge denklemlerinin yazılması
1.4 Bilinmeyen θ ların çözülmesi

2. Uç momentlerin hesabı

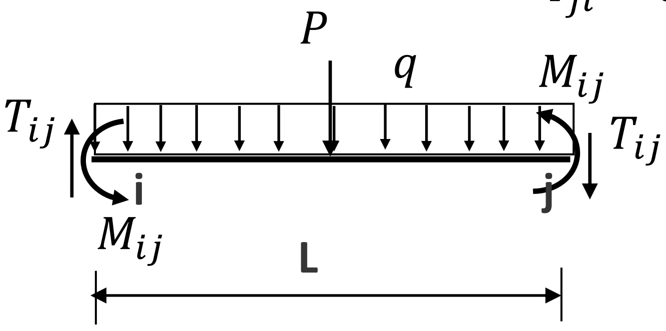
$$M_{ij} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ij} + m_{i\theta_i}\theta_i + m_{i\theta_j}\theta_j$$

$$M_{ji} = \boldsymbol{\mathcal{M}}_{ji} + m_{j\theta_i}\theta_i + m_{j\theta_j}\theta_j$$

3. Uç kesme kuvvetlerinin hesabı

$$T_{ij} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{ij} + t_{i\theta_i}\theta_i + t_{i\theta_j}\theta_j$$

$$T_{ji} = \boldsymbol{\mathcal{T}}_{ji} + t_{j\theta_i}\theta_i + t_{j\theta_j}\theta_j$$



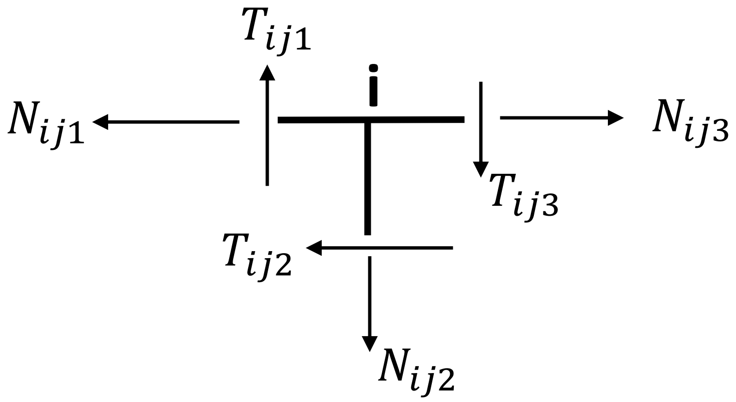
veya

$$T_{ij} = T_{0ij} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

$$T_{ji} = T_{0ji} + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

4. Normal kuvvetlerin hesabı

Düğüm noktalarının düşey ve yatay iz düşüm denklemlerinden yararlanılarak yapılır.



$$\sum x = 0 \qquad \sum y = 0$$

$$N_{ij} = \boldsymbol{\mathcal{N}}_{ij} + n_{i\theta_i}\theta_i + n_{i\theta_j}\theta_j$$

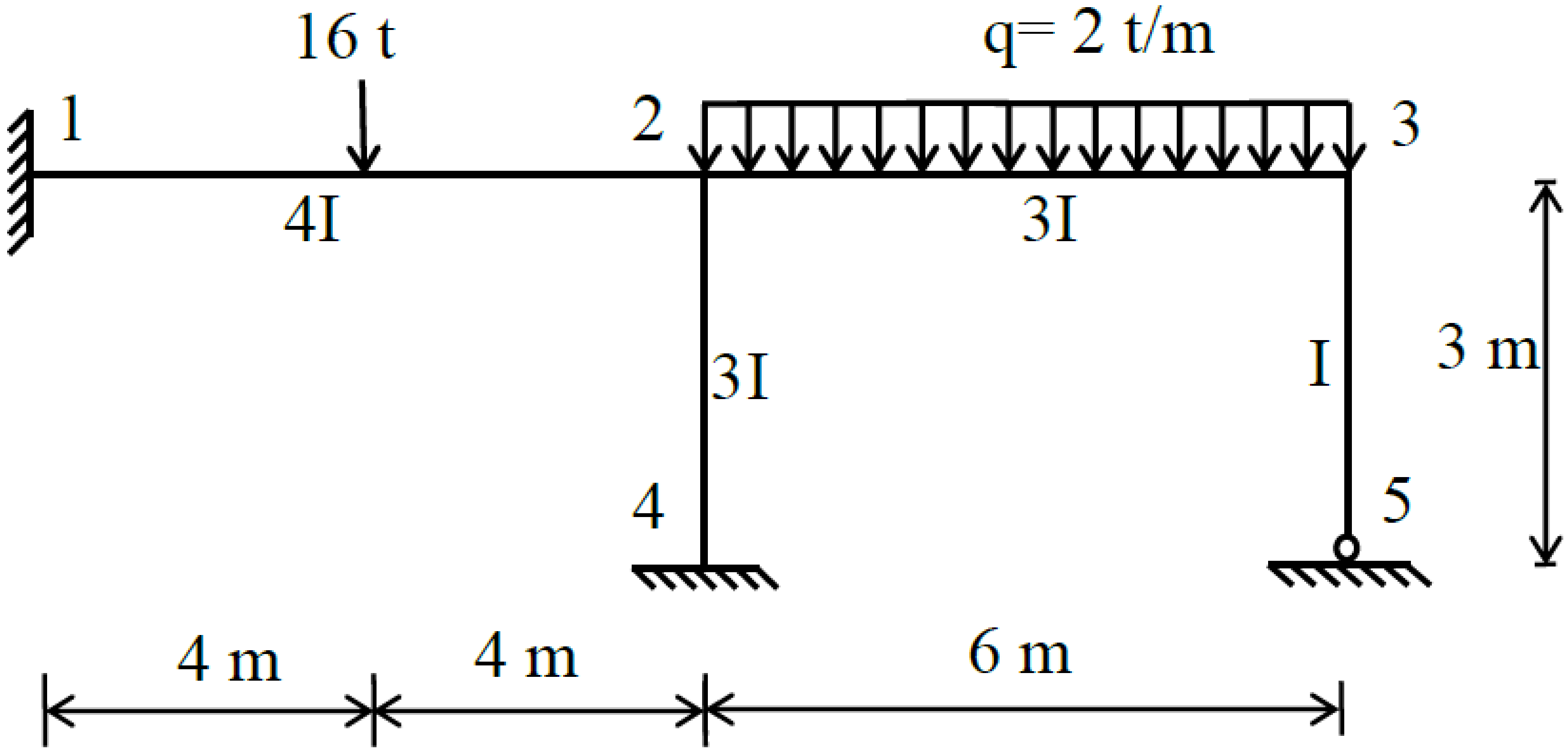
$$N_{ji} = \boldsymbol{\mathcal{N}}_{ji} + n_{j\theta_i}\theta_i + n_{j\theta_j}\theta_j$$

5. Moment diyagramlarının dönüştürülmesi

   Uç momentlerinden eğilme momentlerine geçilir.

6. Bu dönüştürmeden yararlanılarak M, N, T diyagramları çizilir.

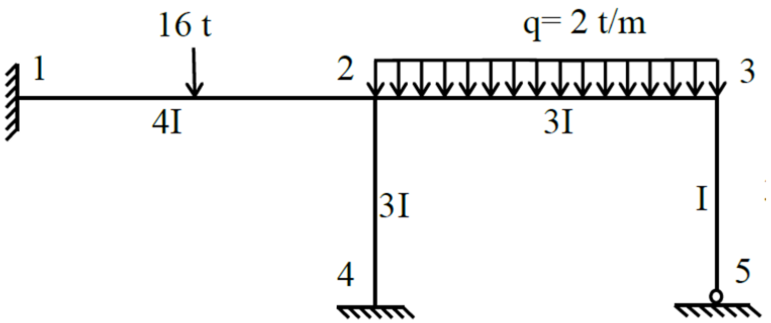
UYGULAMA



1. Ankastrelik momentleri

$$M_{12}=-M_{21}=\frac{PL}{8}=\frac{16x8}{8}=16\text{ tm}$$

$$M_{23}=-M_{32}=\frac{ql^2}{12}=\frac{2x6^2}{12}=6\text{ tm}$$



2. Birim deplasman sabitleri

(1-2 çubuğunda)

$$m_{1\theta_2}^{(2-1)}=\frac{2Ex4I}{8}=EI$$

$$m_{2\theta_2}^{(2-1)}=\frac{4Ex4I}{8}=2EI$$

(2-3 çubuğunda)

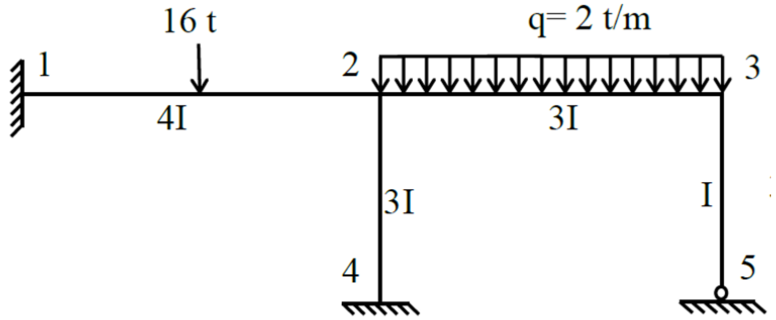
$$m_{2\theta_2}^{(2-3)} = \frac{4E\text{x}3I}{6} = 2EI$$

$$m_{3\theta_3}^{(2-3)} = \frac{4E\text{x}3I}{6} = 2EI$$

(2-4 çubuğunda)

$$m_{2\theta_2}^{(2-4)} = \frac{4E\text{x}3I}{3} = 4EI$$

$$m_{4\theta_2}^{(4-2)} = \frac{2E\text{x}3I}{3} = 2EI$$

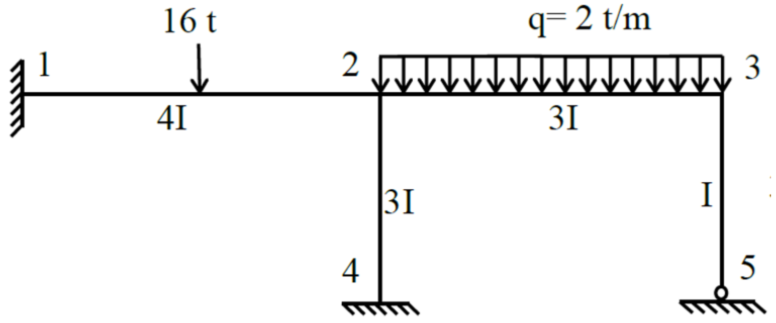


(3-5 çubuğunda)

$$m_{2\theta_3}^{(3-2)} = m_{3\theta_2}^{(2-3)} = EI$$

$$m_{3\theta_3}^{(3-5)} = \frac{3E\text{x}I}{3} = EI$$ (Bir uç mafsallı)

3. Düğüm noktası denge şartı ve denge denklemlerinin yazılması



2 noktası için

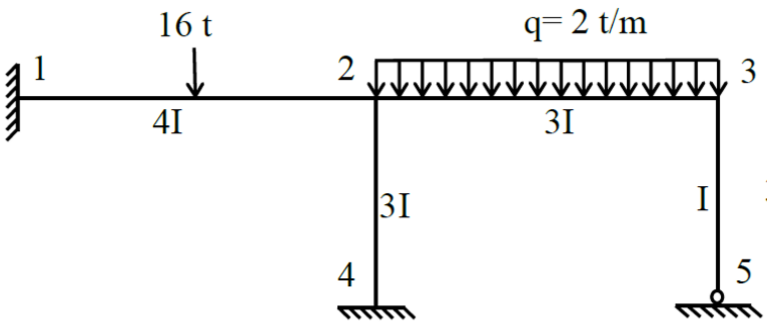
$$\sum M_{2j} + \mathrm{M}_2 + \theta_2 \sum \mathrm{m}_{2\theta_2}^{2\,j} + \theta_3 \sum \mathrm{m}_{2\theta_j} = 0$$

$$-16 + 6 + 0 + \theta_2(2\mathrm{EI} + 2\mathrm{EI} + 4\mathrm{EI}) + \theta_3\mathrm{EI} = 0$$

$$8\mathrm{EI}\theta_2 + \mathrm{EI}\theta_3 - 10 = 0 \qquad (1)$$

3 noktası

$$\sum M_{3j} + \mathrm{M}_3 + \theta_3 \sum \mathrm{m}_{3\theta_3} + \theta_2 \sum \mathrm{m}_{3\theta_j} = 0$$



$$-6 + 0 + \theta_3(2\mathrm{EI} + \mathrm{EI}) + \theta_2\mathrm{EI} = 0$$

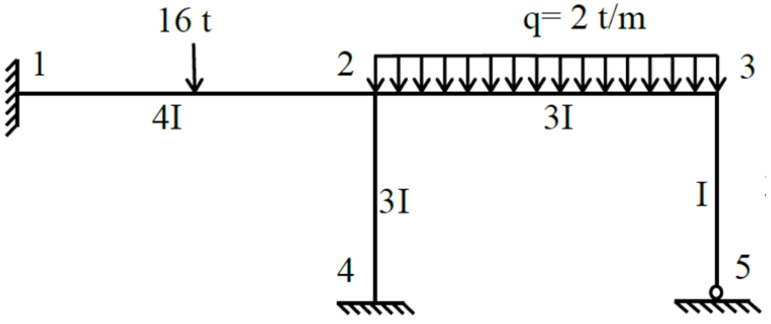
$$3\mathrm{EI}\theta_3 + \mathrm{EI}\theta_2 - 6 = 0 \qquad (2)$$

$$8\mathrm{EI}\theta_2 + \mathrm{EI}\theta_3 - 10 = 0 \qquad (1)$$

$$3\mathrm{EI}\theta_3 + \mathrm{EI}\theta_2 - 6 = 0 \qquad (2)$$

1 ve 2. Denklemlerden $\theta_2 = \frac{1.042}{\mathrm{EI}}$ rd $\theta_3 = \frac{1.67}{\mathrm{EI}}$ rd

4. Uç Momentlerin Hesabı



$$\mathrm{M_{ij}} = M_{\mathrm{ij}} + \mathrm{m_{i\theta_i}}\theta_\mathrm{i} + \mathrm{m_{i\theta_j}}\theta_\mathrm{j}$$

$$\mathrm{M_{21}} = M_{21} + \mathrm{m}_{2\theta_2}^{2\,1}\,\theta_2 + \mathrm{m}_{2\theta_1}\,\theta_1 = -16 + 2\mathrm{EI}\left(\frac{1.042}{\mathrm{EI}}\right) = -13.92\ \mathrm{tm}$$

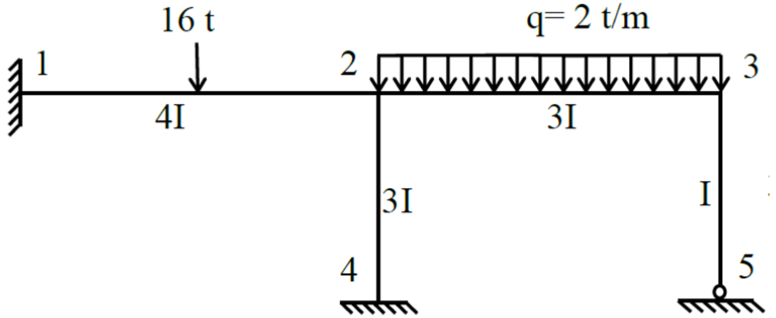
$$\theta_1 = 0$$

$$\mathrm{M_{12}} = M_{12} + \mathrm{m}_{1\theta_1}^{1\,2}\,\theta_1 + \mathrm{m}_{1\theta_2}^{2\,1}\,\theta_2 = 16 + \mathrm{EI}\left(\frac{1.042}{\mathrm{EI}}\right) = 17.04\ \mathrm{tm}$$

$$M_{23} = M_{23} + m_{2\theta_2}^{2\,3}\,\theta_2 + m_{2\theta_3}^{2\,3}\,\theta_3 = 6 + 2EI\left(\frac{1.042}{EI}\right) + EI\left(\frac{1.67}{EI}\right) = 9.75\ \text{tm}$$

$$M_{24} = M_{24} + m_{2\theta_2}^{2\,4}\,\theta_2 + 0 = 0 + 4EI\left(\frac{1.042}{EI}\right) = 4.17\ \text{tm}$$

$$M_{42} = m_{4\theta_2}^{4\,2}\,\theta_2 = 2EI\left(\frac{1.042}{EI}\right) = 2.08\ \text{tm}$$

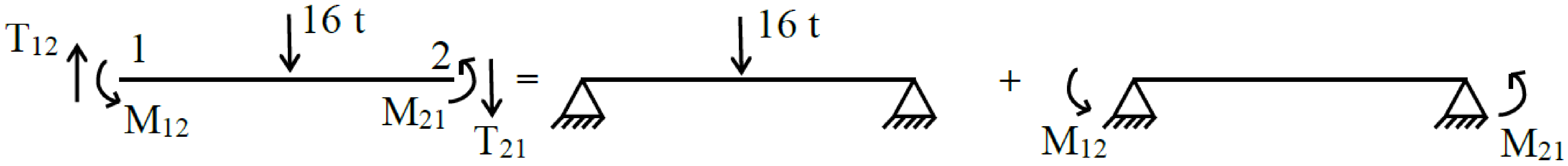


$$M_{32} = M_{32} + m_{3\theta_3}^{3\,2}\,\theta_3 + m_{3\theta_2}^{3\,2}\,\theta_2 = -6 + 2EI\left(\frac{1.67}{EI}\right) + EI\left(\frac{1.042}{EI}\right) = -1.67\ \text{tm}$$

$$M_{35} = 0 + m_{3\theta_3}^{3\,5}\,\theta_3 = EI\left(\frac{1.67}{EI}\right) = 1.67\ \text{tm}$$

5. Uç Kesme Kuvvetlerinin Hesabı

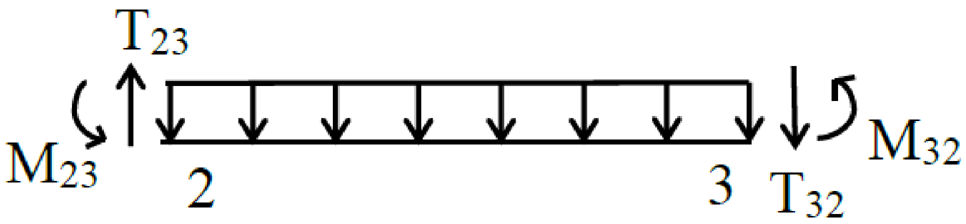
- 1-2 çubuğu



$$T_{12} = T_{012} + \frac{M_{12} + M_{21}}{l} = 8 + \frac{17.04 - 13.92}{8} = 8 + 0.39 = 8.39\ \text{t}$$

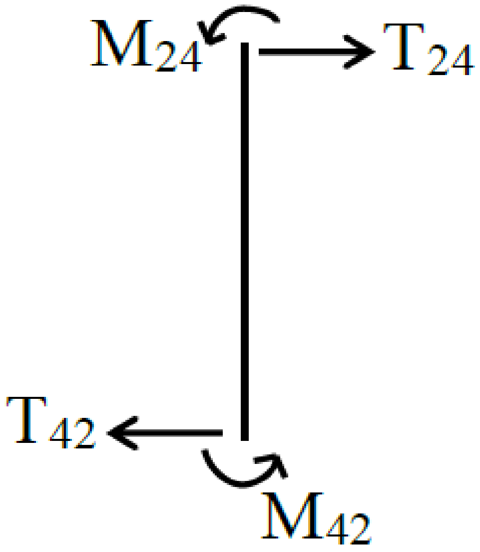
$$T_{21} = T_{021} + \frac{M_{12} + M_{21}}{l} = -8 + \frac{17.04 - 13.92}{8} = -8 + 0.39 = -7.61\ \text{t}$$

- 2-3 çubuğu



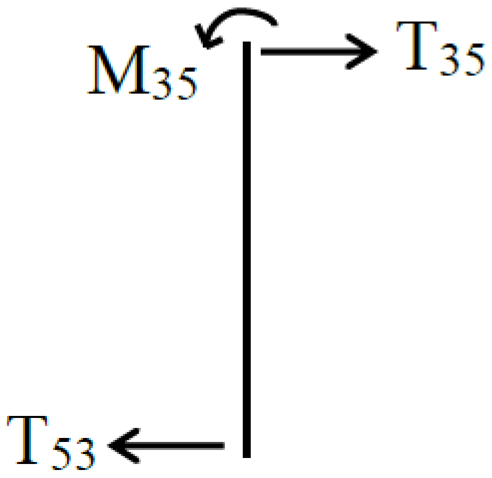
$$T_{23} = T_{023} + \frac{M_{23} + M_{32}}{l} = 6 + \frac{9.75 - 1.67}{6} = 7.18\ \mathrm{t}$$

$$T_{32} = -6 + \frac{9.75 - 1.67}{6} = -4.82\ \mathrm{t}$$



$$T_{24} = T_{42} = \frac{M_{24} + M_{42}}{l} = \frac{4.17 + 2.08}{3} = 2.08\ \mathrm{t}$$

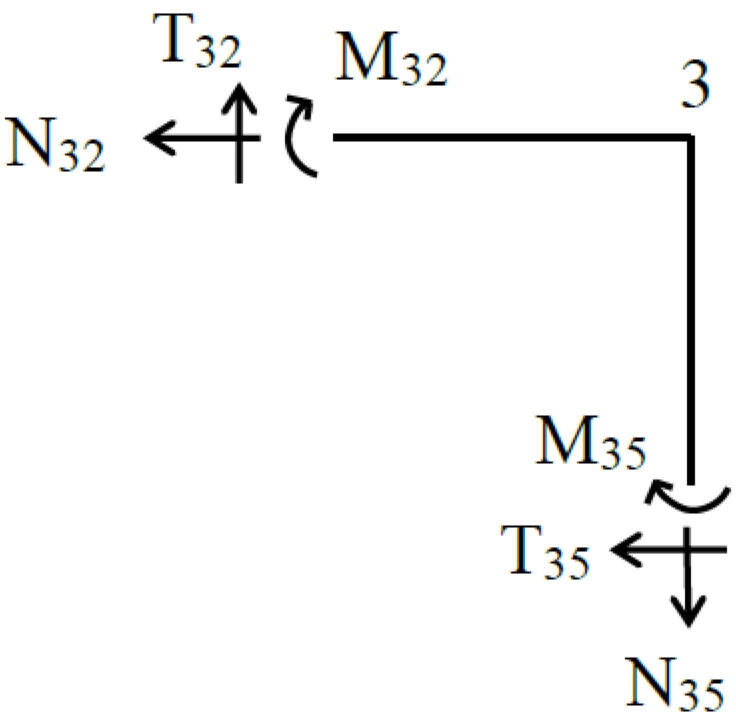
- 3-5 çubuğu



$$T_{35} = T_{53} = \frac{M_{35}}{l} = \frac{1.67}{3} = 0.55\ \text{t}$$

6. Normal Kuvvetlerin Hesabı

3 düğüm noktası



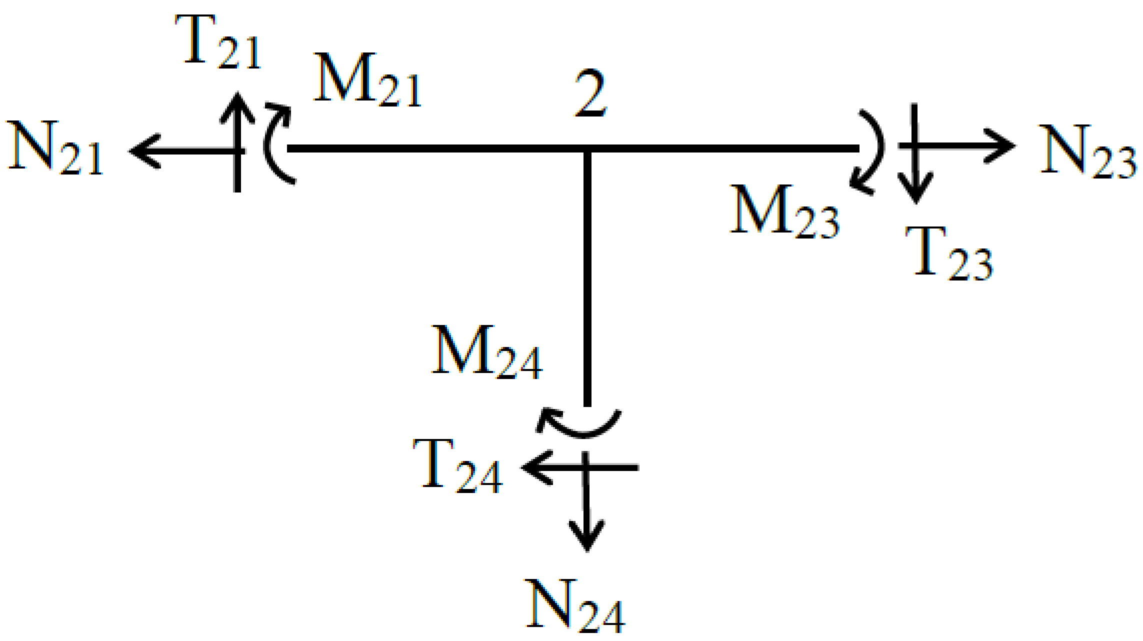
$\sum F_x = 0 \qquad N_{32} + T_{35} = 0$

$N_{32} = -T_{35} = -0.55\ t$

$\sum F_y = 0 \qquad T_{32} - N_{35} = 0$

$T_{32} = N_{35} = -4.82\ t$

2 düğüm noktası



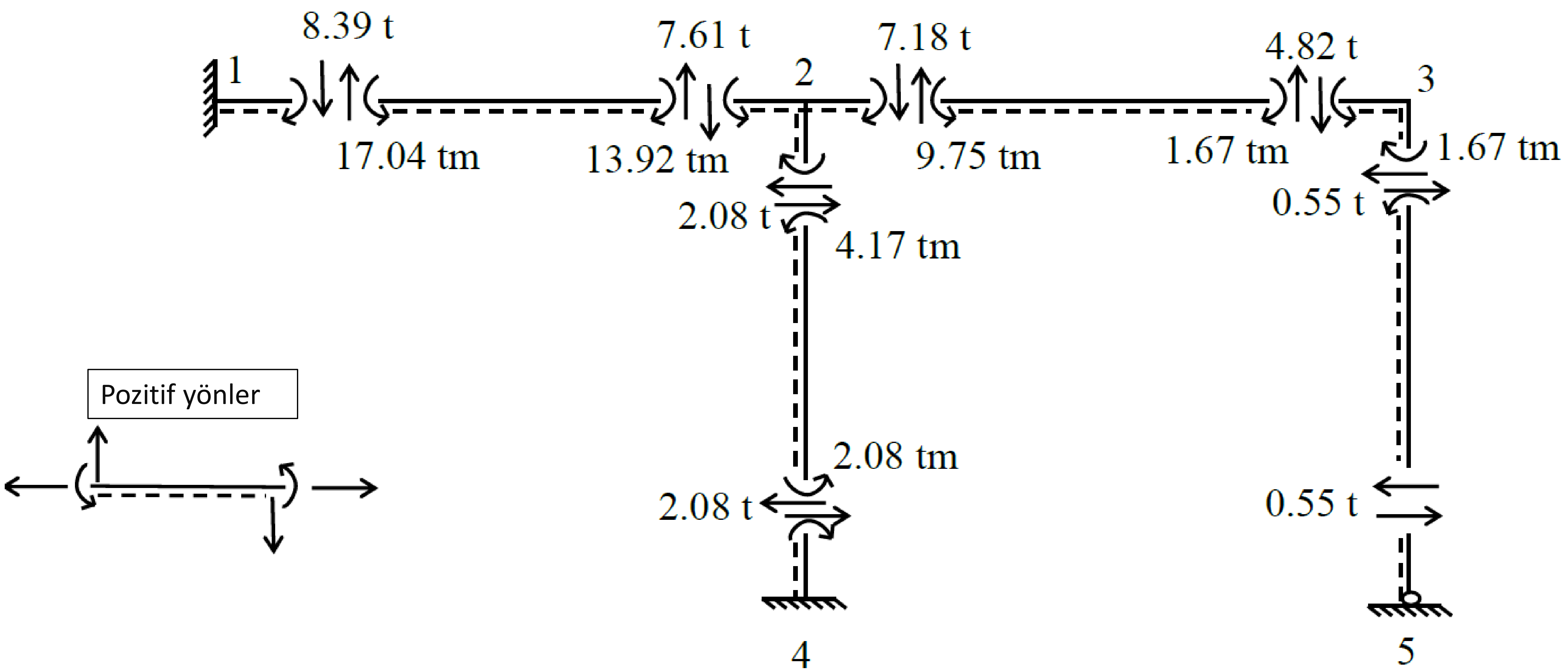
$\sum F_x = 0 \qquad N_{23} - N_{21} - T_{24} = 0$

$N_{21} = -0.55 - 2.08 = -2.63\ \text{t}$

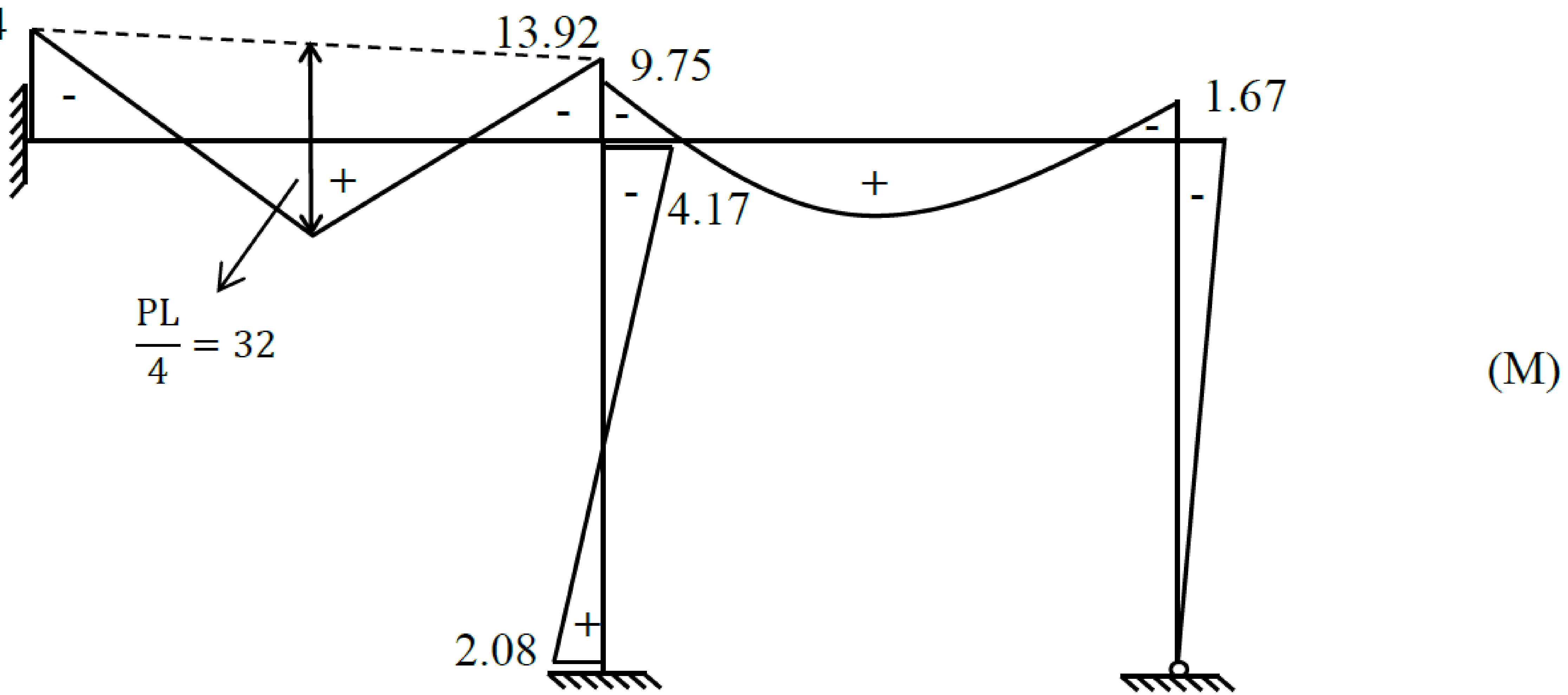
$\sum F_y = 0 \qquad T_{21} - T_{23} - N_{24} = 0$

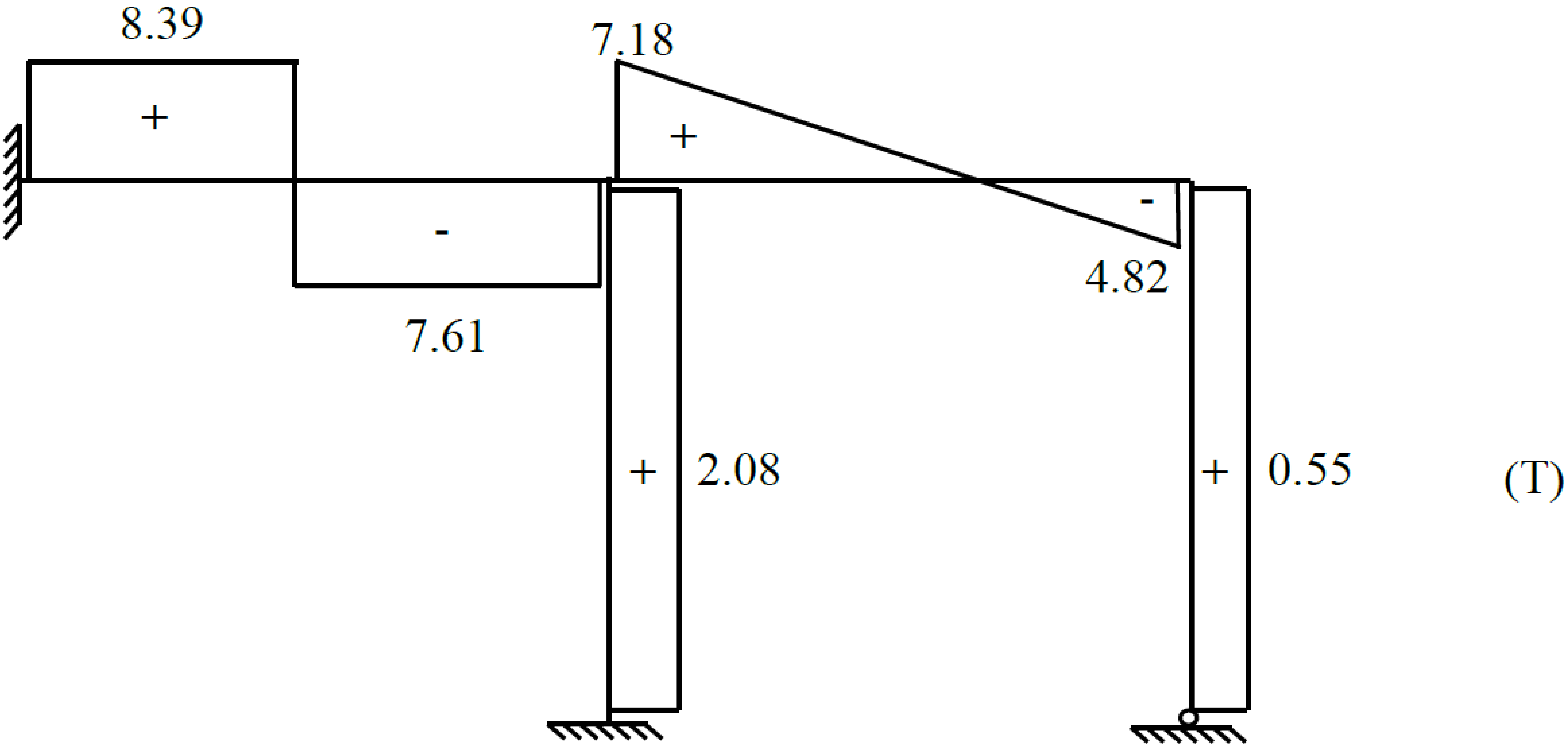
$N_{24} = -7.61 - 7.18 = -14.79\ \text{t}$

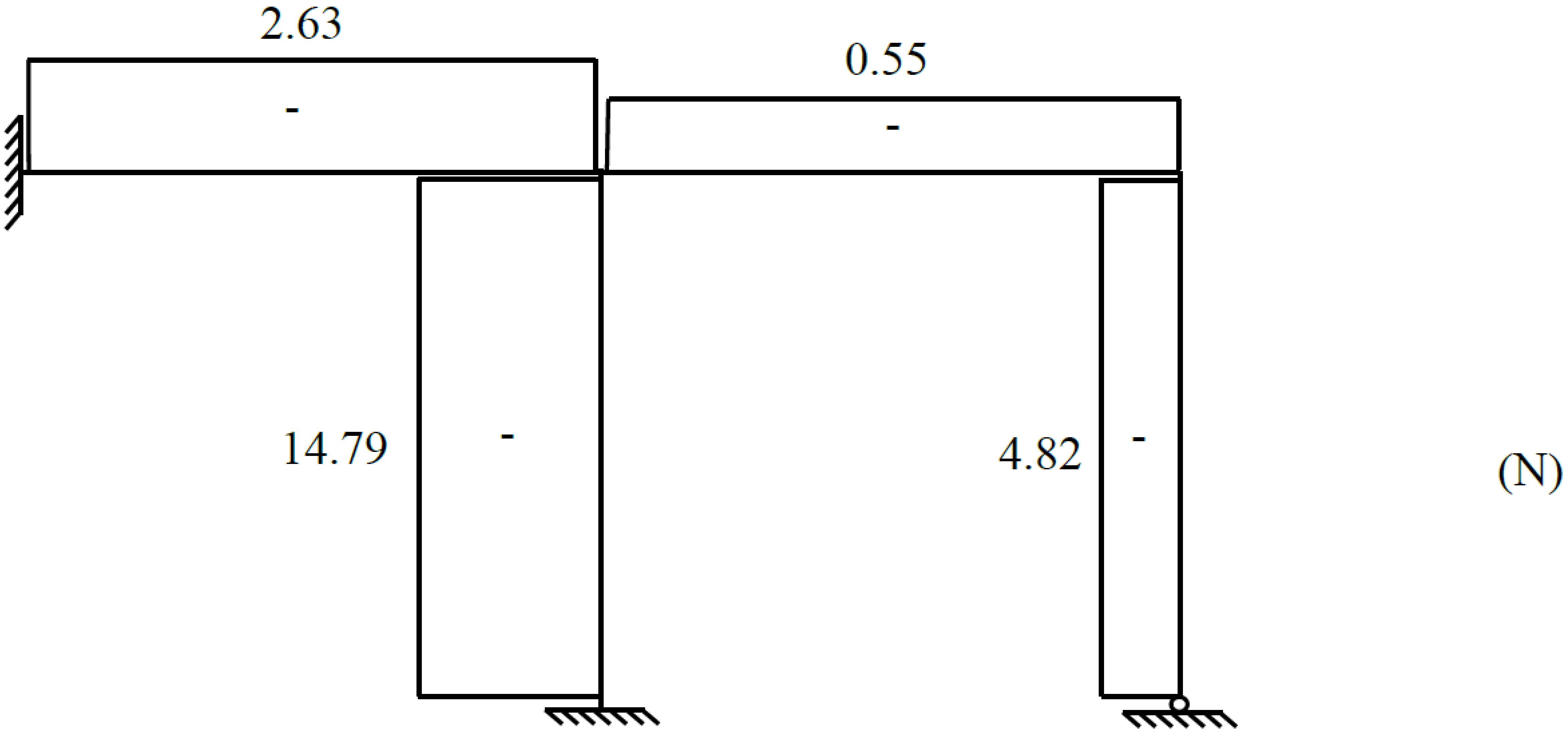
7. Dönüştürme



8. Diyagramlar




8.39
+
7.18
+
-
-
4.82
7.61
+
2.08
+
0.55
(T)


2.63
-
0.55
-
14.79
-
4.82
-
(N)