

YAPI STATİĞİ 1

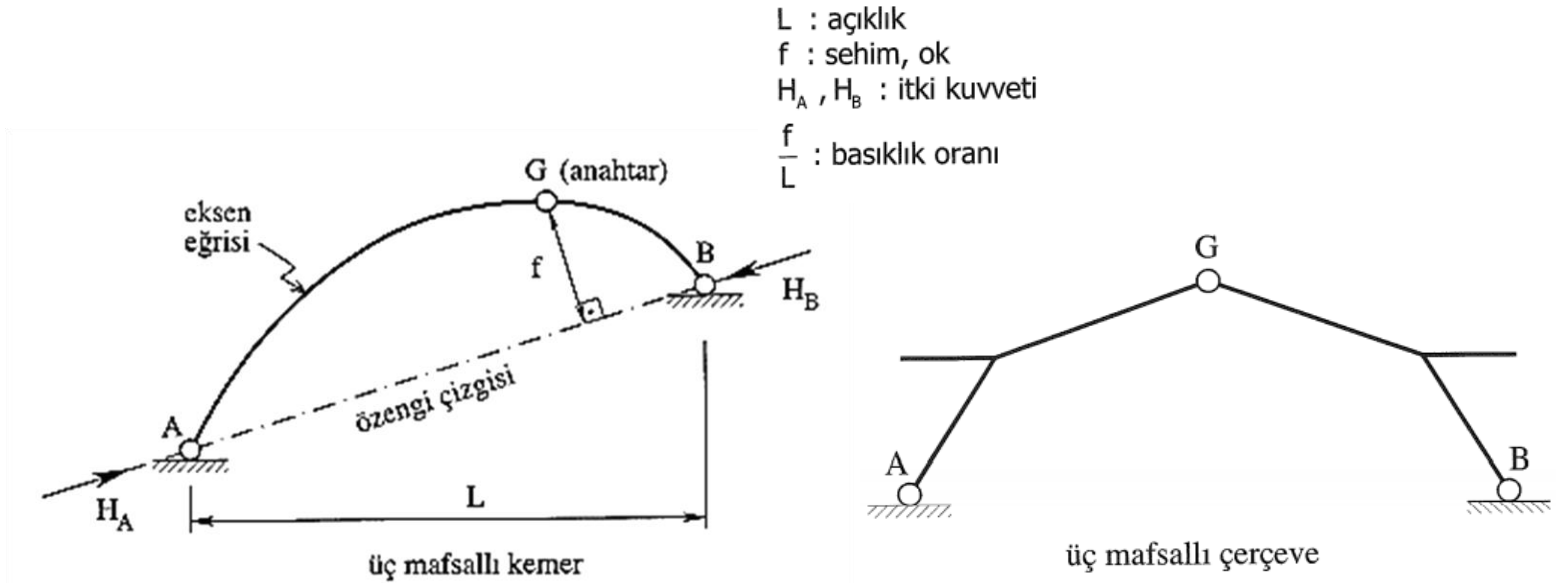
DERS NOTLARI 6

Prof. Dr. Cengiz Dünder

BÖLÜM 6 ÜÇ MAFSALLI KEMER VE ÇERÇEVELER

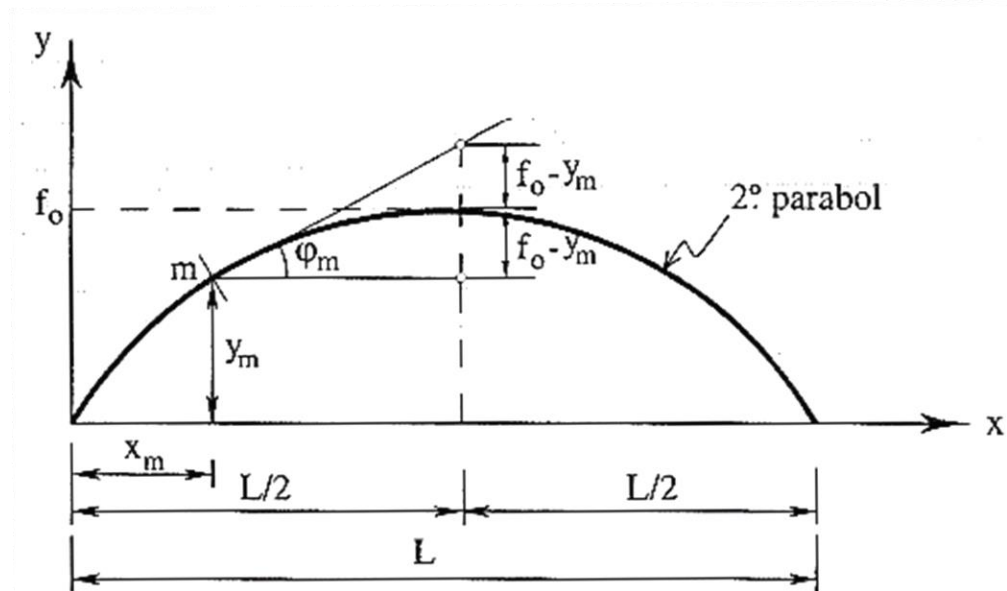
Tanım ve Genel Bilgiler

İki mesnedi sabit olan ve bu mesnetler arasında da bir adet mafsalı bulunan sistemlere **Üç Mafsallı Sistem** denilmektedir. Bu sistemler, eğer çubuk eksenleri eğri ise **Üç Mafsallı Kemer**, doğru ise **Üç Mafsallı Çerçeve** olarak adlandırılırlar.



NOT: Kemerin geometrisi için 2. Derece Parabolün Özellikleri

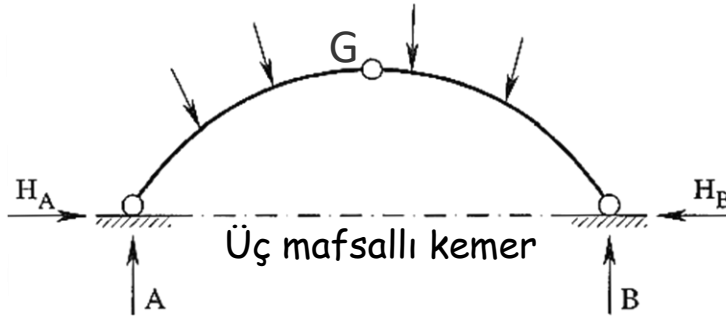
2.° parabol denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olarak bilinmektedir. Bu denklemin, kemerin geometrisini tanımlayan değişkenlere bağlı olarak ifadesi aşağıda verilmiştir.



Eksen eğrisi 2.° parabol olan kemer

$$y = \frac{4f_0}{L^2} x(L - x) \quad , \quad \tan \varphi_m = \frac{2(f_0 - y_m)}{\frac{L}{2} - x_m}$$

Üzengi çizgisi yataysa



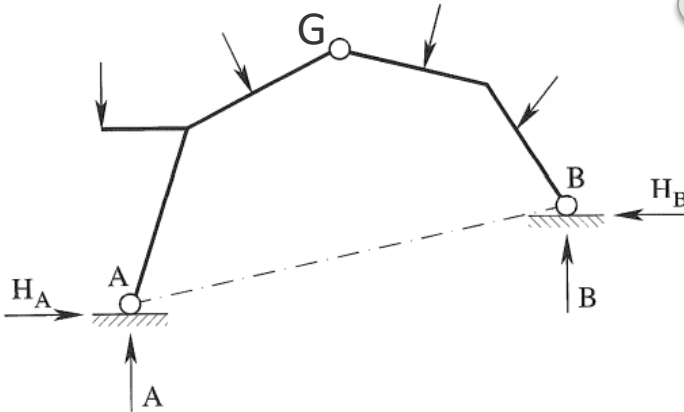
$\sum M_A = 0 \rightarrow B$, $\sum M_B = 0 \rightarrow A$ mesnet tepkileri bulunur.

$\sum Y = 0$ düşey izdüşüm denge denklemi Kontrol için kullanılır.

$\sum M_{G, sol} = 0 \rightarrow H_A$, $\sum M_{G, sağ} = 0 \rightarrow H_B$ mesnet tepkileri bulunur.

$\sum X = 0$ yatay izdüşüm denge denklemi Kontrol için kullanılır.

Üzengi çizgisi yatay değilse



NOT: Her iki durum için de kesit zorları bilinen şekilde hesaplanır.

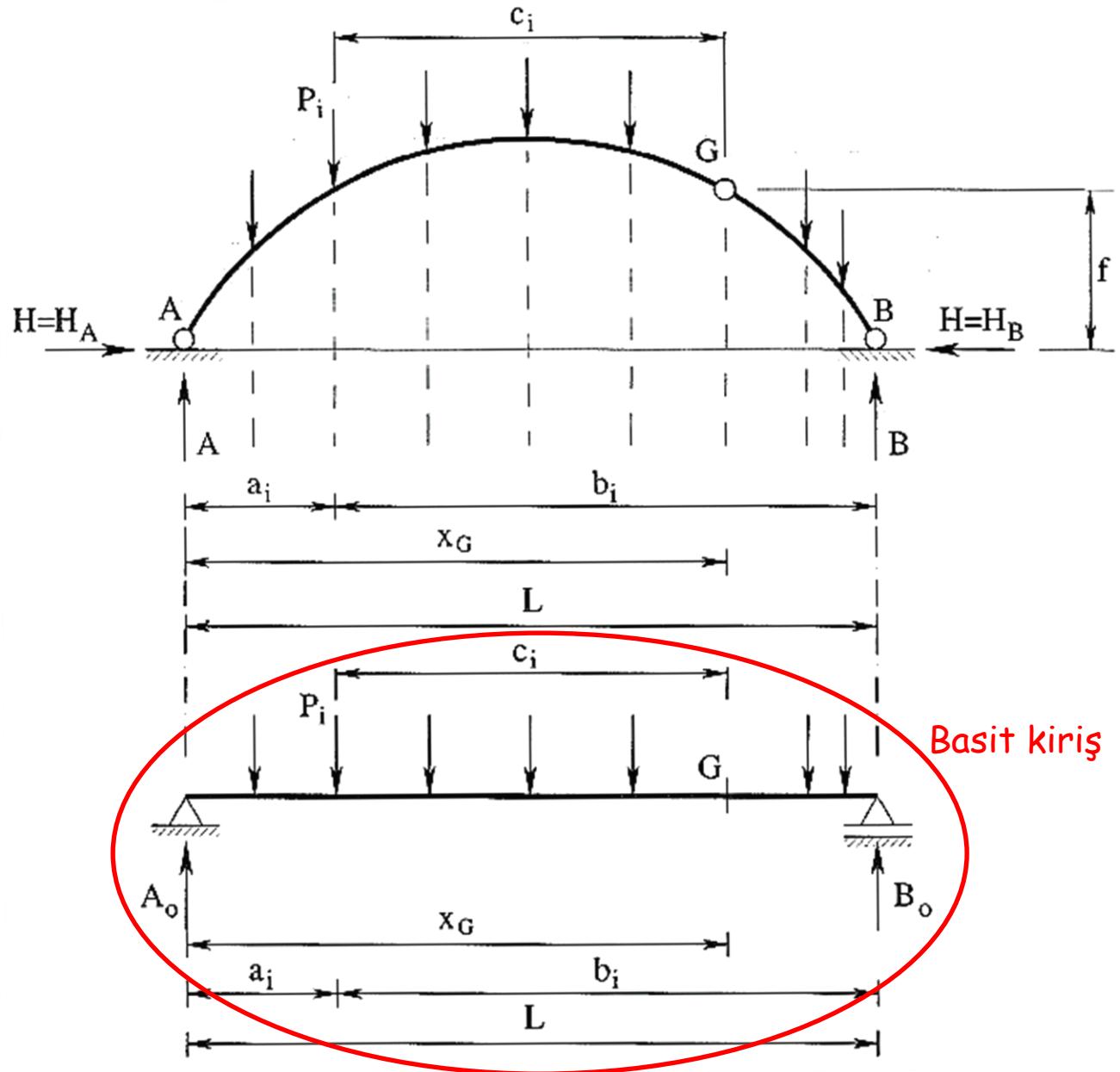
NOT: Çerçevelerde kritik kesitlerdeki kesit zorları ile M, N, T diyagramları çizilebilirken eğri eksenli kemerlerde yeteri sayıda noktada kesit zorları hesaplanmalıdır.

$\sum M_A = 0 \rightarrow (B, H_B)$, $\sum M_{G, sağ} = 0 \rightarrow (B, H_B)$ iki bilinmeyenli iki denklem çözülerek B ve H_B bulunur.

$\sum M_B = 0 \rightarrow (A, H_A)$, $\sum M_{G, sol} = 0 \rightarrow (A, H_A)$ iki bilinmeyenli iki denklem çözülerek A ve H_A bulunur.

$\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ yatay ve düşey izdüşüm denge denklemleri Kontrol için kullanılır.

Sisteme etkiyen yüklerin düşey ve üzengi çizgisi yatay olması halinde mesnet tepkilerinin ve kesit zoru değerlerinin elde edilmesi



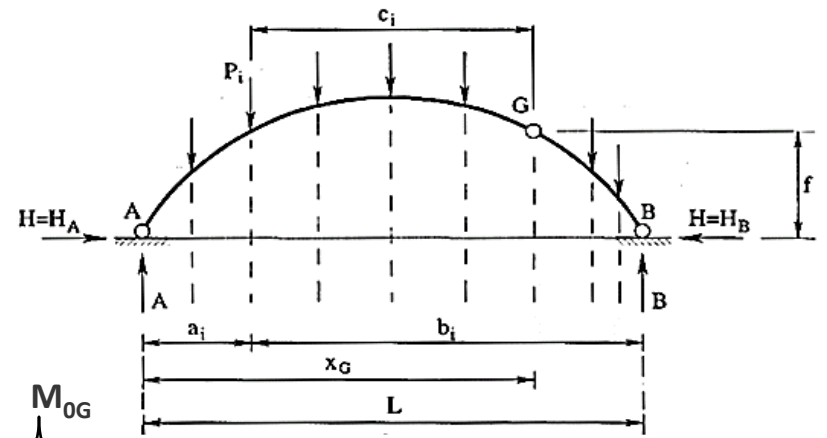
Üç mafsallı sisteme ait mesnet tepkileri,

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = H_B = H \text{ (itki kuvveti)}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \sum P_i a_i - B \times L = 0 \Rightarrow B = \frac{\sum P_i a_i}{L}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A \times L - \sum P_i b_i = 0 \Rightarrow A = \frac{\sum P_i b_i}{L}$$

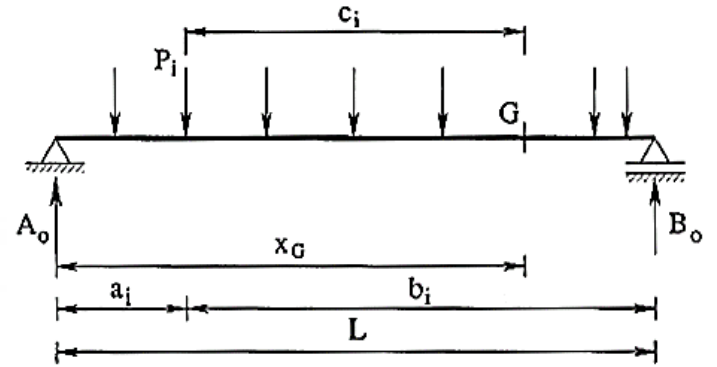
$$\sum M_{G, \text{sol}} = 0 \Rightarrow A \times x_G - H \times f - \sum P_i c_i = 0 \Rightarrow H = \frac{A \times x_G - \sum P_i c_i}{f} = \frac{M_{0G}}{f}$$



basit kiriş için mesnet tepkileri,

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \sum P_i a_i - B_0 \times L = 0 \Rightarrow B_0 = \frac{\sum P_i a_i}{L}$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow A_0 \times L - \sum P_i b_i = 0 \Rightarrow A_0 = \frac{\sum P_i b_i}{L}$$



bulunur. Her iki durum karşılaştırıldığında,

$$A = A_0$$

$$B = B_0$$

$$H = \frac{M_{0G}}{f}$$

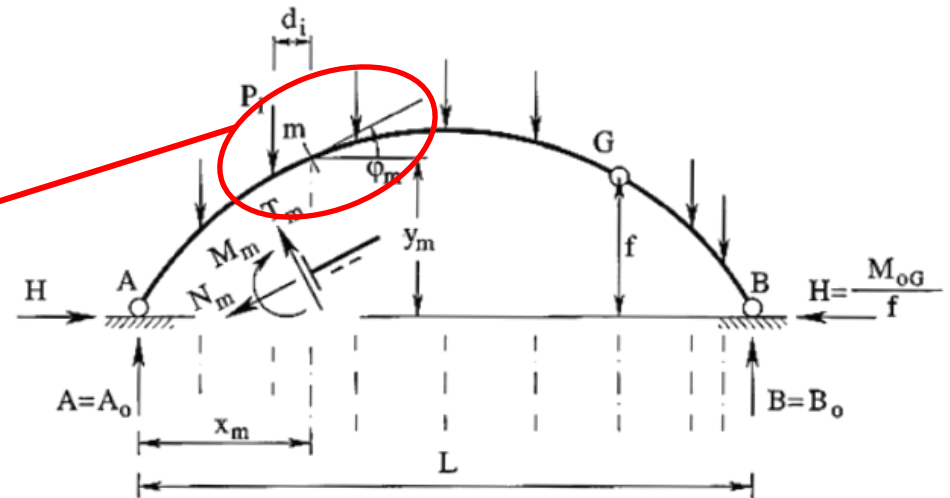
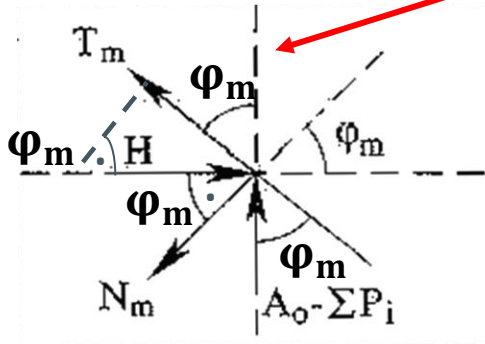
olduğu görülür.

M_{0G} : Aynı açıklıklı basit kirişin G noktasındaki eğilme momentidir.

$$M_m = A_0 x_m - \sum P_i d_i - H \times y_m$$

$$M_{0m} = A_0 x_m - \sum P_i d_i$$

$$\Rightarrow M_m = M_{0m} - H \times y_m$$



$$T_m = (A_0 - \sum P_i) \times \cos \phi_m - H \times \sin \phi_m$$

$$T_{0m} = A_0 - \sum P_i$$

$$\Rightarrow T_m = T_{0m} \times \cos \phi_m - H \times \sin \phi_m$$

$$N_m = -(A_0 - \sum P_i) \times \sin \phi_m - H \times \cos \phi_m$$

$$T_{0m} = A_0 - \sum P_i$$

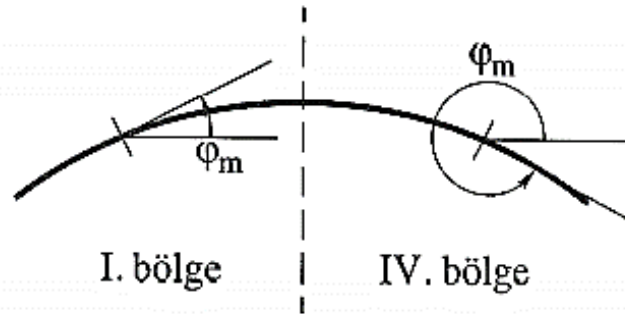
$$\Rightarrow N_m = -T_{0m} \times \sin \phi_m - H \times \cos \phi_m$$

M_{0m} : Aynı açıklıklı basit kirişin m kesitindeki eğilme momenti

T_{0m} : Aynı açıklıklı basit kirişin m kesitindeki kesme kuvveti

N_{0m} : Aynı açıklıklı basit kirişin m kesitindeki normal kuvvet ($N_{0m} = 0$)

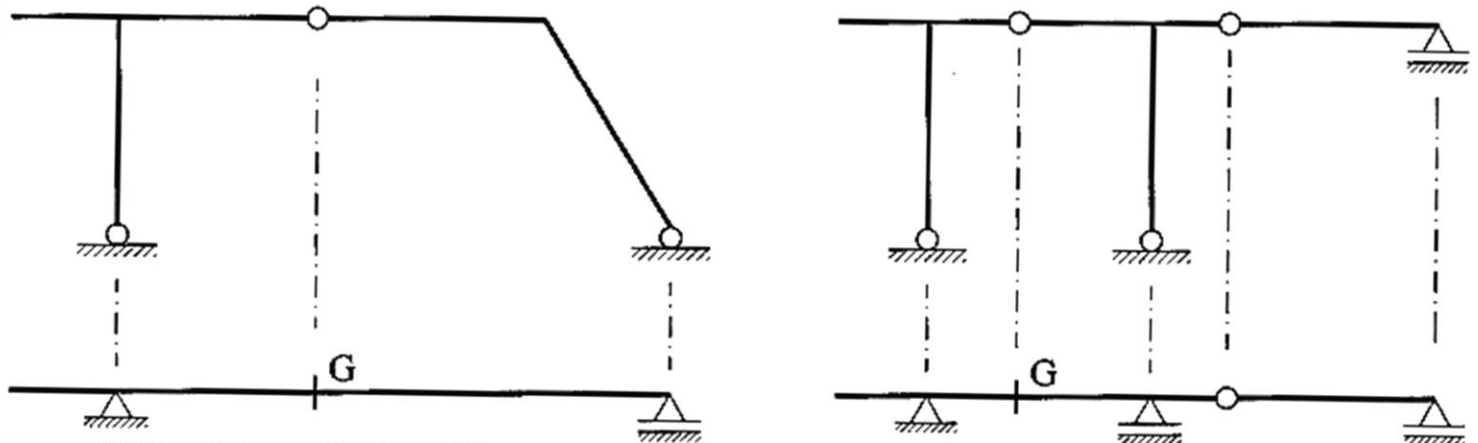
Not : 1)



ϕ_m açısı I. bölgede ise, $\cos\phi_m \rightarrow (+)$, $\sin\phi_m \rightarrow (+)$

ϕ_m açısı IV. bölgede ise, $\cos\phi_m \rightarrow (+)$, $\sin\phi_m \rightarrow (-)$

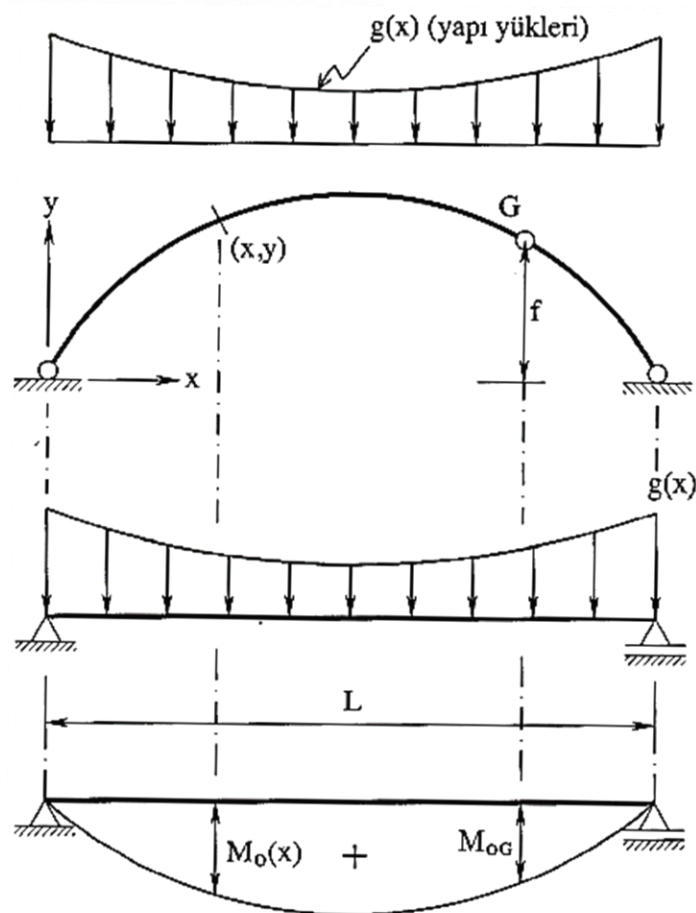
2) Sistemde konsollar v.s. bulunması durumlarında aynı açıklıklı sistem basit kirişten farklı olabilir.



Eksen Eğrisinin Seçimi

Yapı ağırlığının önemli bir bölümünü yapı öz ağırlığının (yapı yüklerinin) meydana getirdiği ve yapıların boyutlandırılmasında eğilme momentinin etkin olduğu bilinmektedir. Üç mafsallı sistemlerin bütün kesitlerinde eğilme momentleri sıfır olacak şekilde eksen eğrisinin seçilmesi durumunda, en ekonomik boyutlandırma elde edilir.

Tüm kesitlerde $M(x) \equiv 0$ olursa buna bağlı olarak $\frac{dM(x)}{dx} = T(x) \equiv 0$ olur. Bu durumda sistemin bütün kesitlerinde yalnız normal kuvvetler oluşur.



$$M(x) = M_0(x) - H \times y(x) = 0$$

$$H = \frac{M_{0G}}{f}$$

$$y(x) = \frac{M_0(x)}{H} = \frac{1}{H} \times M_0(x)$$

$$y(x) = \frac{f}{M_{0G}} \times M_0(x) \quad , \quad \frac{f}{M_{0G}} = \text{Sabit}$$

Yukarıdaki işlemler izlendiğinde, $y(x)$ eksen eğrisinin $M_0(x)$ eğilme momenti diyagramı ile benzer (orantılı) olarak seçilmesi durumunda bütün kesitlerde eğilme momentleri ve kesme kuvvetlerinin sıfır olduğu görülür. Bu benzerlikte orantı katsayısı $\frac{f}{M_{0G}}$ dir. Elde edilen eksen eğrisine yükün finiküleri (yükün ip eğrisi) denir.

Bu durumda sistemde yalnız normal kuvvetler oluşur.

Normal kuvvetin değeri ise

$$N(x) = -H \times \cos\varphi - T_0(x) \times \sin\varphi$$

$$y(x) = \frac{f}{M_{0G}} \times M_0(x) \quad \tan\varphi = \frac{dy(x)}{dx}$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{f}{M_{0G}} \times \frac{dM_0(x)}{dx} \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{f}{M_{0G}} \times T_0(x) = \tan\varphi$$

$$T_0(x) = \frac{M_{0G}}{f} \times \tan\varphi = H \times \tan\varphi$$

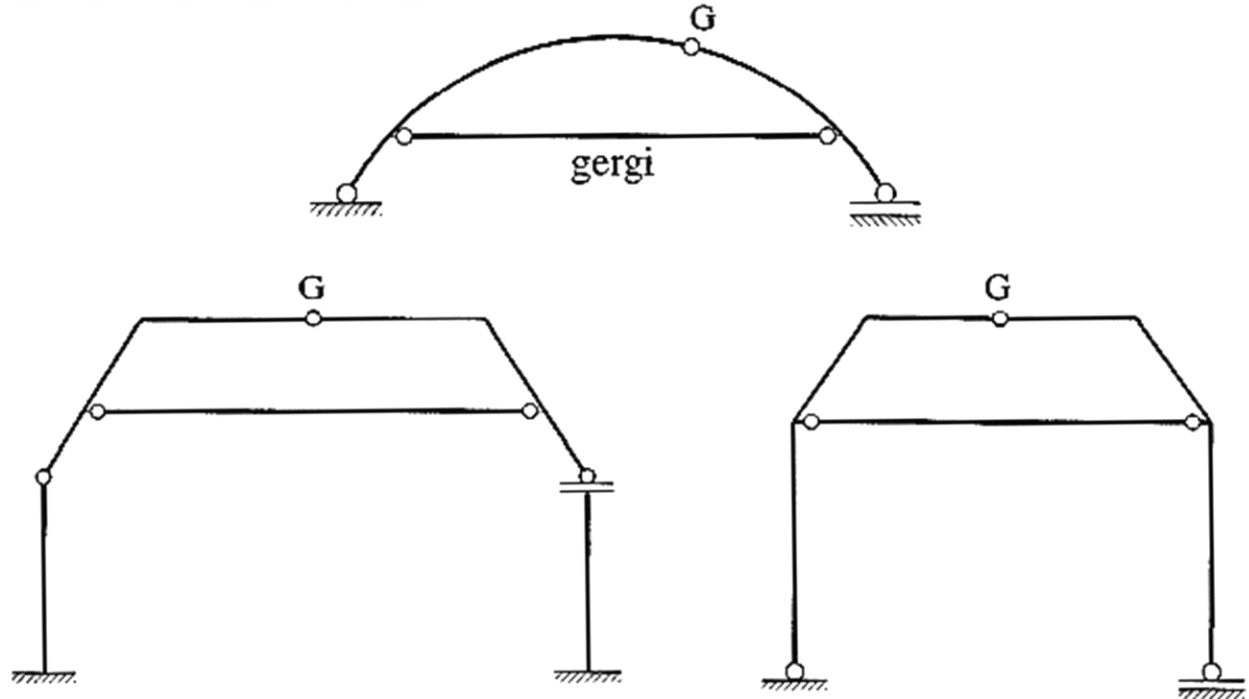
$$\Rightarrow N(x) = -H \times \cos\varphi - H \times \tan\varphi \times \sin\varphi = \frac{-H}{\cos\varphi}$$

Üç Mafsallı Gergili Sistemler

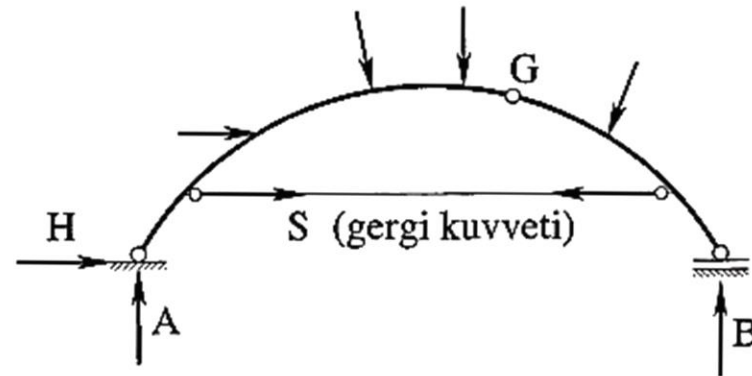
Mesnetlerinden biri sabit diğeri kayıcı olan bu tür sistemlerin, mesnetleri arasında bir mafsal ve mafsalin iki yanını birbirine bağlayan bir gergi bulunmaktadır.

Bu tür sistemler genellikle,

- a) Zeminin itki kuvvetini karşılayamayacak kadar çürük olan zeminlerde
- b) Kolonların itki kuvvetlerini karşılayamayacak kadar zayıf olduğu durumlarda kullanılırlar.

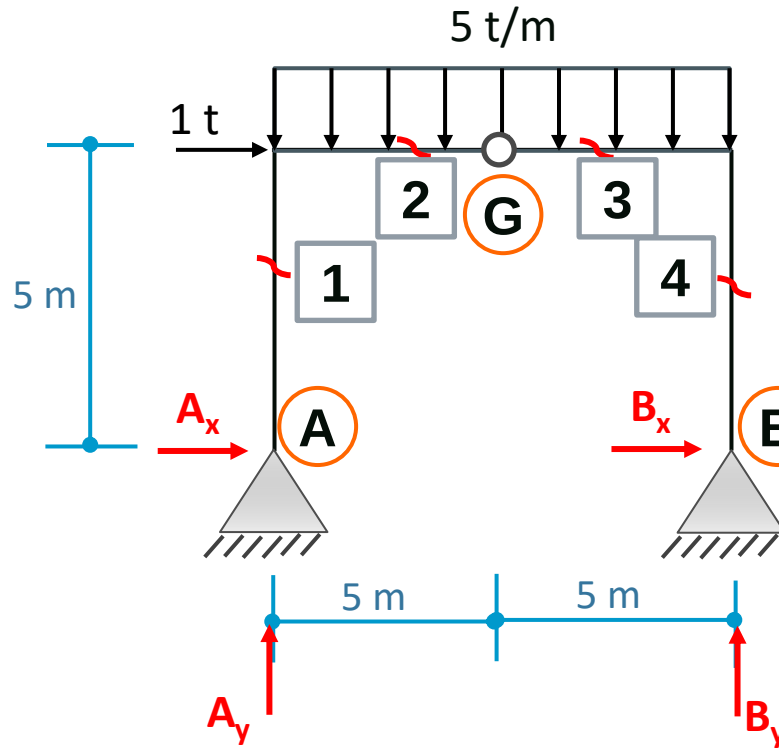


Sistemin Hesabı



A, B, H mesnet tepkileri sistemin denge denklemlerinden hesaplanır. S gergi kuvveti ise $\sum M_G = 0$ koşulundan hesaplanır.

Çözümlü Problemler



Sistemin M diyagramını çiziniz.

$$\rightarrow \sum X = 0 \quad A_x + B_x + 1 = 0$$

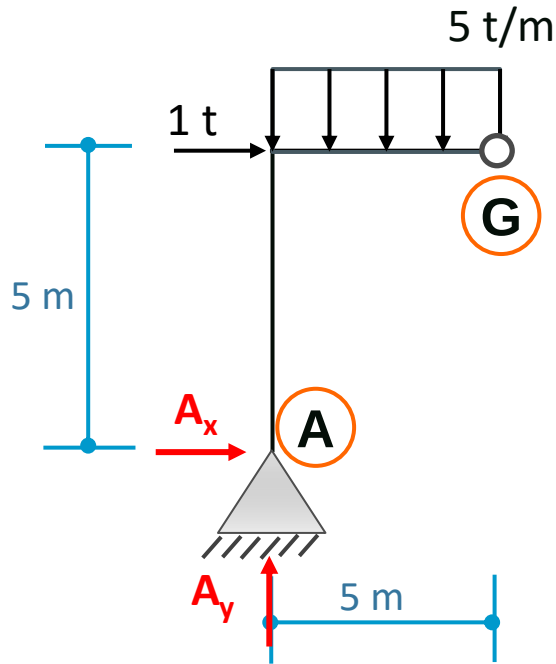
$$A_x + B_x = -1 \text{ t}$$

$$\uparrow \sum Y = 0 \quad A_y + B_y = 5 * 10 = 50 \text{ t}$$

$$\curvearrow \sum M_A = 0$$

$$-1 * 5 - 50 * 5 + 10 * B_y = 0 \quad 10B_y = 255 \text{ t} \quad B_y = 25.5 \text{ t} \quad A_y = 24.5 \text{ t}$$

Ek şart: Mafsal şartı



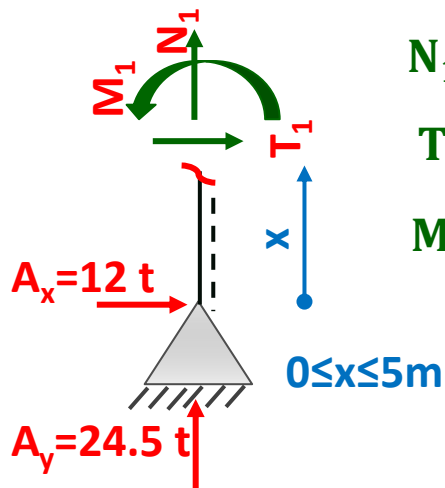
$$\circlearrowleft \sum M_{G(sol)} = 0$$

$$5 * A_x + 25 * 2.5 - 24.5 * 5 = 0$$

$$A_x = 12 \text{ t} \quad B_x = -13 \text{ t}$$

Tüm mesnet tepkileri bulunduktan sonra gerekli kritik noktalarda kesimler yapılarak kesit zoru değerleri belirlenir.

1 nolu kesim:



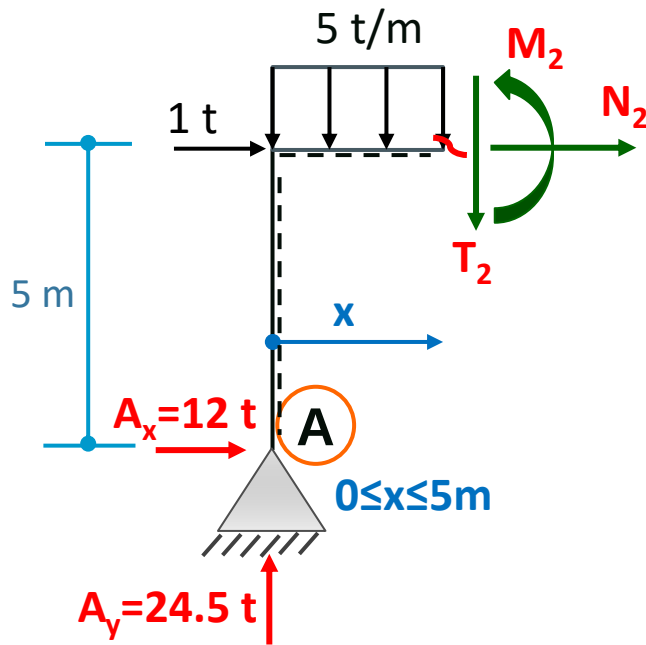
$$N_1 = -24.5 \text{ t}$$

$$T_1 = -12 \text{ t}$$

$$M_1 = -12x \quad x = 0 \quad M_A = M_1 = 0$$

$$x = 5 \text{ m} \quad M_1 = -60 \text{ tm}$$

2 nolu kesim:



$$N_2 = -13 \text{ t}$$

$$-5x - T_2 + 24.5 = 0$$

$$T_2 = -5x + 24.5 \text{ (doğrusal)}$$

$$x = 0 \quad T_2 = 24.5 \text{ t}$$

$$x = 5 \text{ m} \quad T_2 = -0.5 \text{ t}$$

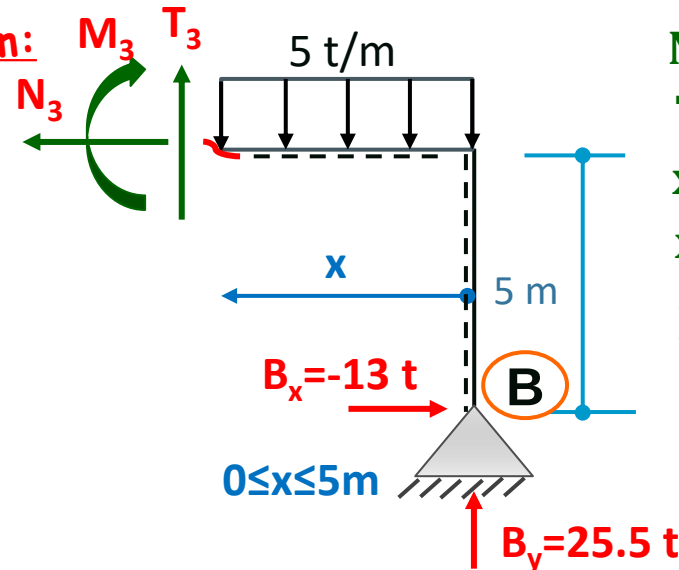
$$M_2 + 5x * \frac{x}{2} + 12 * 5 - 24.5x = 0$$

$$M_2 = -2.5x^2 + 24.5x - 60 \text{ (parabolik)}$$

$$x = 0 \quad M_2 = -60 \text{ tm}$$

$$x = 5 \text{ m} \quad M_G = M_2 = 0$$

3 nolu kesim:



$$N_3 = -13 \text{ t}$$

$$T_3 = 5x - 25.5$$

$$x = 0 \quad T_3 = -25.5 \text{ t}$$

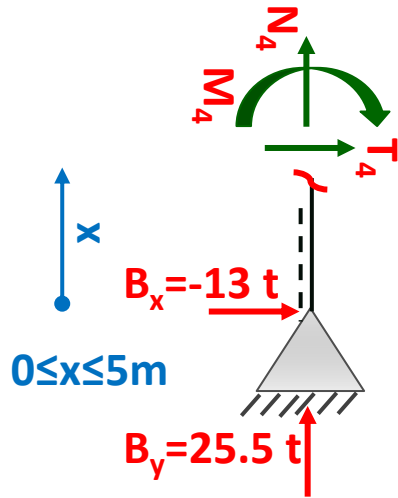
$$x = 5 \text{ m} \quad T_3 = -0.5 \text{ t}$$

$$M_3 = -2.5x^2 + 25.5x - 65$$

$$x = 0 \quad M_3 = -65 \text{ tm}$$

$$x = 5 \text{ m} \quad M_G = M_3 = 0$$

4 nolu kesim:



$$N_4 = -25.5 \text{ t}$$

$$T_4 = 13 \text{ t}$$

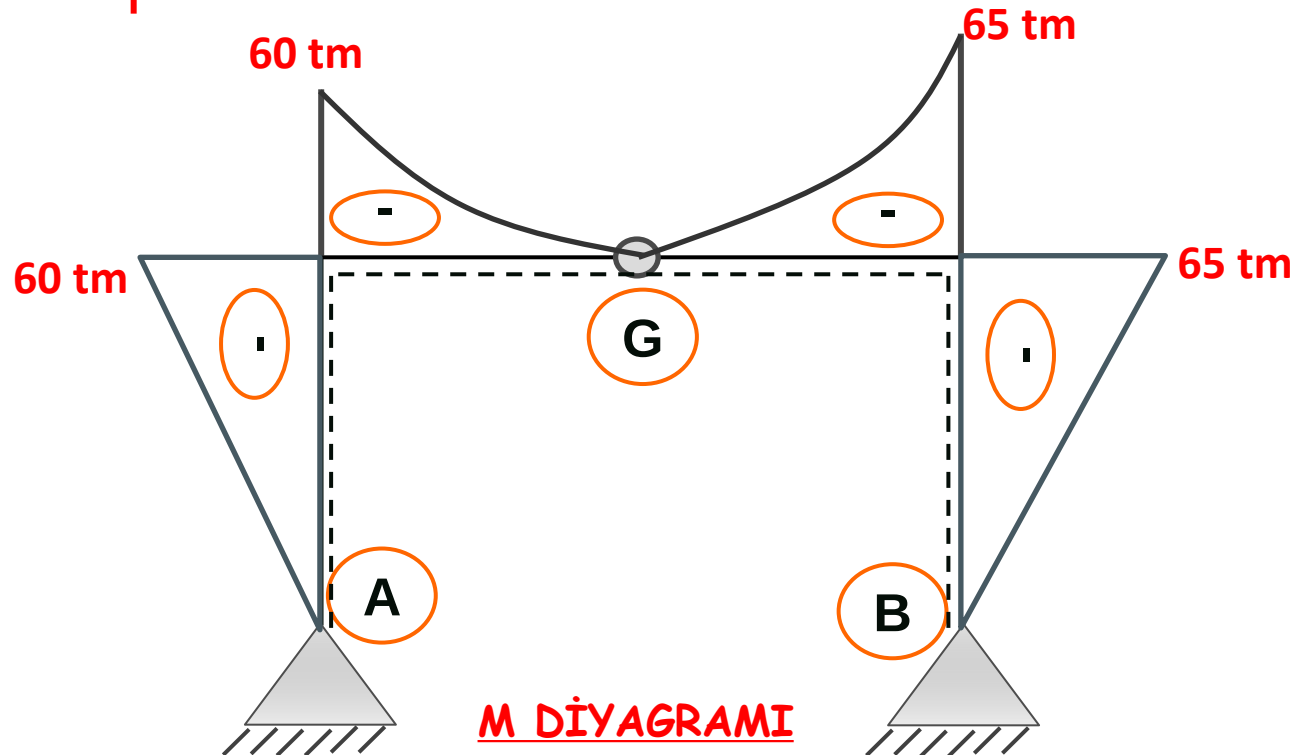
$$M_4 = -13x$$

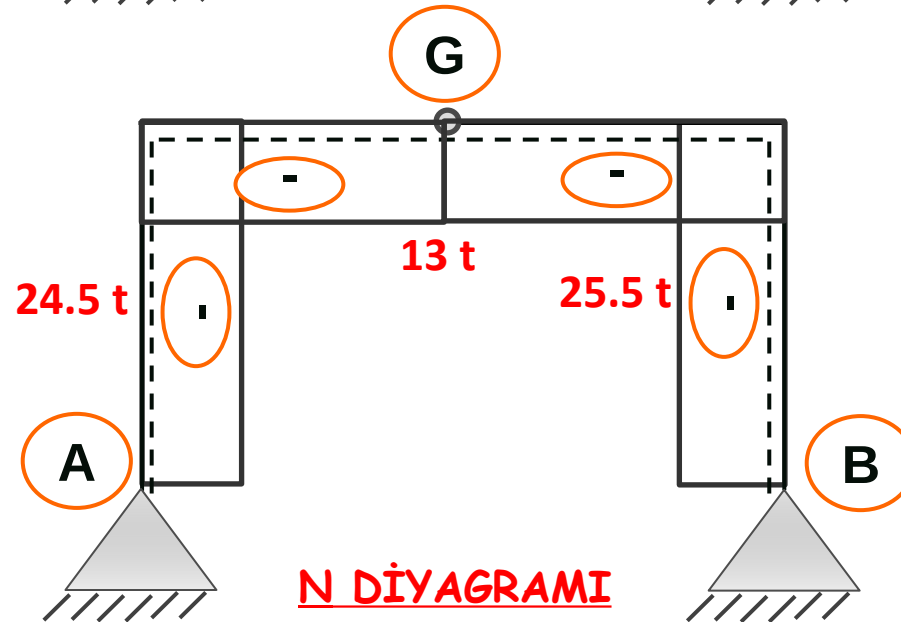
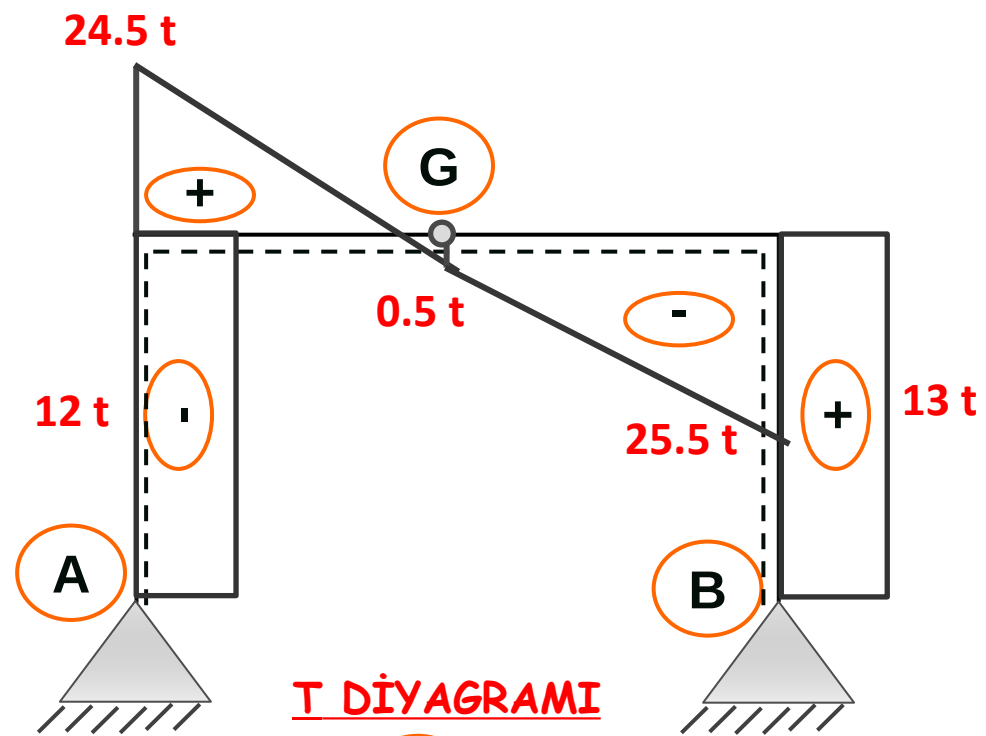
$$x = 0$$

$$M_B = M_4 = 0$$

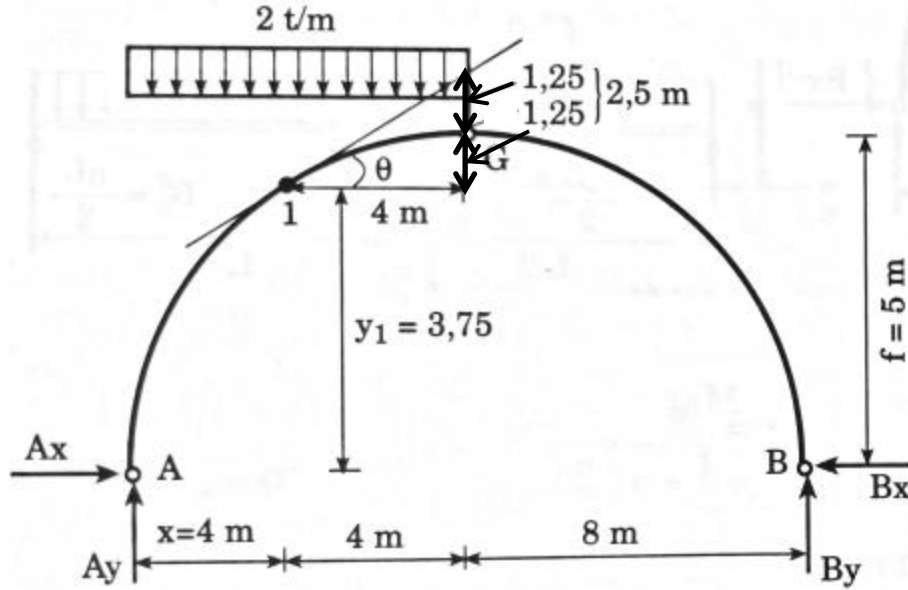
$$x = 5\text{m}$$

$$M_4 = -65 \text{ tm}$$

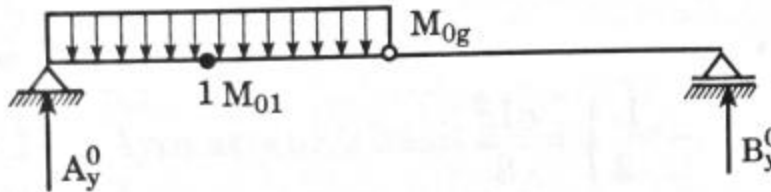




Şekilde yükleme durumu verilen 3 mafsallı kemerin 1 kesitinde ki moment kesme kuvveti ve normal kuvveti hesaplayınız



Şekil-16.6



Parabolün denkleminde.

$$y_1 = \frac{4f}{L^2} x(L - x)$$

$$y_1 = \frac{4 \cdot 5}{(16)^2} 4 (16 - 4) = 3,75 \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{2,5}{4} = 0,625$$

$$\sin \theta = 0,530$$

$$\cos \theta = 0,848$$

Basit kirişte

$$+ \uparrow \Sigma y = 0, \quad A_y^0 - (2 \cdot 8) + B_y^0 = 0 \quad A_y^0 + B_y^0 = 16 \text{ t}$$

$$+ \curvearrowright \Sigma M_B = 0, \quad 16 \cdot A_y^0 - 16 \cdot 12 = 0 \quad A_y^0 = 12 \text{ ton}$$

$$B_y^0 = 4 \text{ ton}$$

$$+ \curvearrowright \Sigma M_{0g} = B_y^0 \cdot 8 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ t.m}$$

$$A_x = B_x \frac{M_{0g}}{f} = \frac{32}{5} = 6,4 \text{ ton}$$

1 noktasındaki kesit tesirleri:

$$N_1 = -V_{01} \sin \theta - A_x \cos \theta \quad V_{01} = 12 - 2 \cdot 4 = 4 \text{ ton}$$

$$N_1 = -4 \cdot 0,530 - 6,4 \cdot 0,848 = -7,55 \text{ ton}$$

$$V_1 = V_{01} \cos \theta - A_x \sin \theta$$

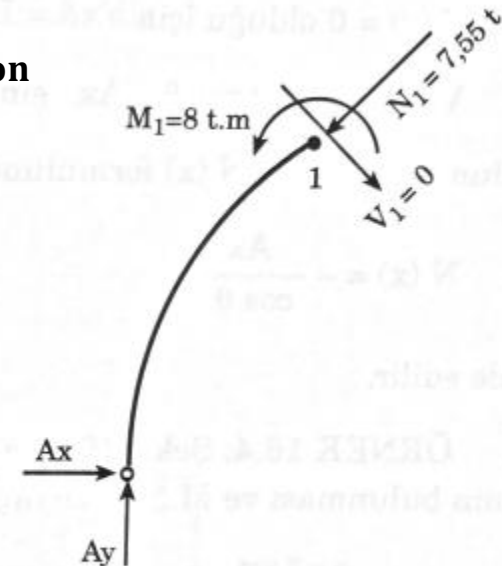
$$V_1 = 4 \cdot 0,848 - 6,4 \cdot 0,530$$

$$V_1 = 3,392 - 3,392 = 0$$

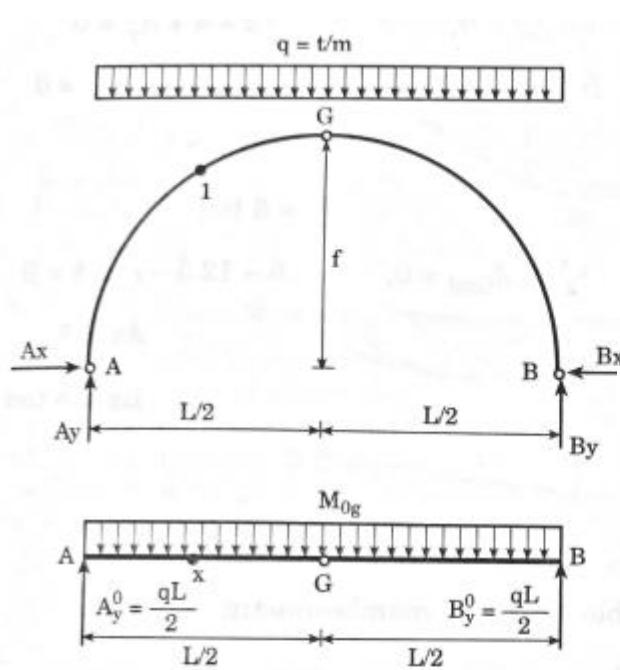
$$M_1 = M_{01} - A_x \cdot y$$

$$M_1 = A_y^0 \cdot 4 - 8 \cdot 2 - 3,75 \cdot 6,4$$

$$M_1 = 12 \cdot 4 - 16 - 24 = 8 \text{ t.m}$$



Şekilde yükleme durumu verilen eksen 2. derece parabol olan 3 mafsallı kemerin $M(x)$, $V(x)$ ve $N(x)$ denklemlerini belirleyiniz



$$A_y = A_y^0 = \frac{qL}{2} = B_y = B_y^0 \quad y = \frac{4f}{L^2} \cdot x \cdot (L - x) :$$

$$H = \frac{M_{0g}}{f} = \frac{qL^2}{8f} \quad M_{0g} = \frac{qL^2}{8}$$

$$M(x) = \left(\frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \right) - \frac{qL^2}{8f} \cdot \frac{4f}{L^2} \cdot x \cdot (L - x) = 0$$

$$V(x) = \left(\frac{qL}{2} - qx \right) \cdot \cos \theta - \frac{qL^2}{8f} \cdot \sin \theta$$

$$V(x) = \left(\frac{qL}{2} - qx - \frac{qL^2}{8f} \tan \theta \right) \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2} \cdot (L - 2x)$$

$$V(x) = \left[\frac{qL}{2} - qx - \frac{qL^2}{8f} \cdot \frac{4f}{L^2} (L - 2x) \right] \cos \theta = 0$$

$$\left(\frac{qL}{2} - qx - \frac{qL}{2} + qx \right) \cos \theta = 0$$

Bütün kesitlerde eğilme momentleri ile kesme kuvvetlerinin sıfıra eşit oldukları görülmektedir.

Normal Kuvvet ise.

$$N(x) = - [V_0(x) \sin \theta + A_x \cdot \cos \theta]$$

$V(x) = 0$ olduğu için

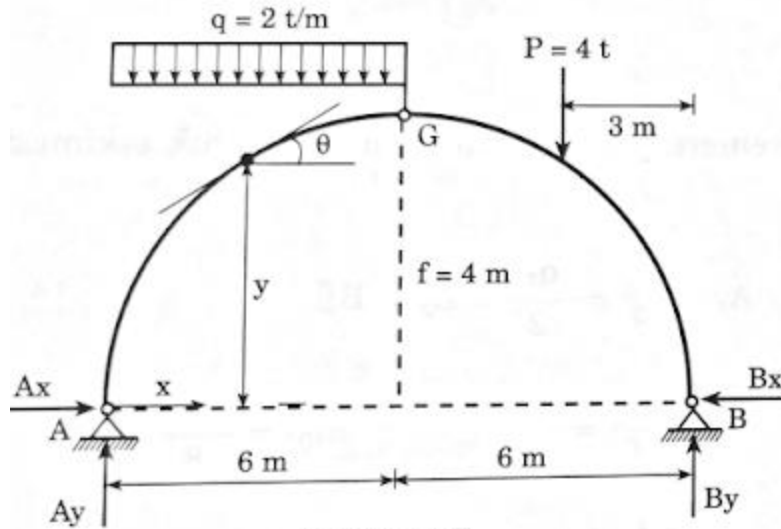
$$V(x) = V_0(x) \cos \theta - Ax \cdot \sin \theta = 0 \quad V_0(x) = Ax \cdot \tan \theta$$

bulunur. Bu ifade $N(x)$ formülünde yerine konursa,

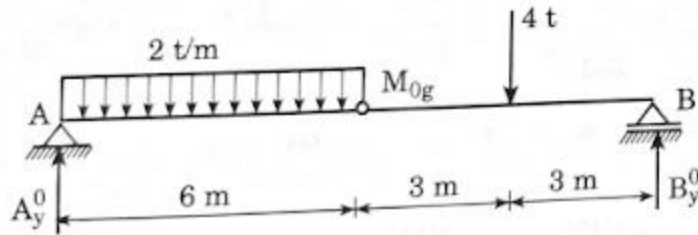
$$N(x) = - \frac{Ax}{\cos \theta}$$

elde edilir.

ÖRNEK 16.4: Şekil-16.7'de yükleme durumu verilen üç mafsallı kemerin kesit tesirlerinin bulunması ve M.N.V. Diyagramlarının çizilmesi.



Şekil-16.7



a) Mesnet reaksiyonları

$$+\rightarrow \sum X = 0, \quad A_x - B_x = 0$$

$$+\uparrow \sum Y = 0, \quad A_y^0 - 12 - 4 + B_y^0 = 0$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = 0, \quad A_y^0 \cdot 12 - 12 \cdot 9 - 4 \cdot 3 = 0$$

$$A_y^0 = 10 \text{ ton}$$

$$B_y^0 = 6 \text{ ton}$$

$$+\curvearrowright \sum M_{Gsol} = 0, \quad A_y^0 \cdot 6 - 12 \cdot 3 - A_x \cdot 4 = 0$$

$$A_x = 6 \text{ ton}$$

$$B_x = 6 \text{ ton}$$

b) Kesit tesirlerinin bulunması:

Bu işlem x'e değerler vermek suretiyle tablo-16.1'de tamamlanmıştır.

Tablodaki,
$$y = \frac{4f}{L^2} \cdot x \cdot (L - x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2} \cdot (12 - x) x$$

$$y = \frac{1}{9} (12 - x) x$$

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx}, \text{ Türevi alınır}$$

$$\tan\theta = \frac{dx}{dx} = \frac{1}{9} (12 - 2x)$$

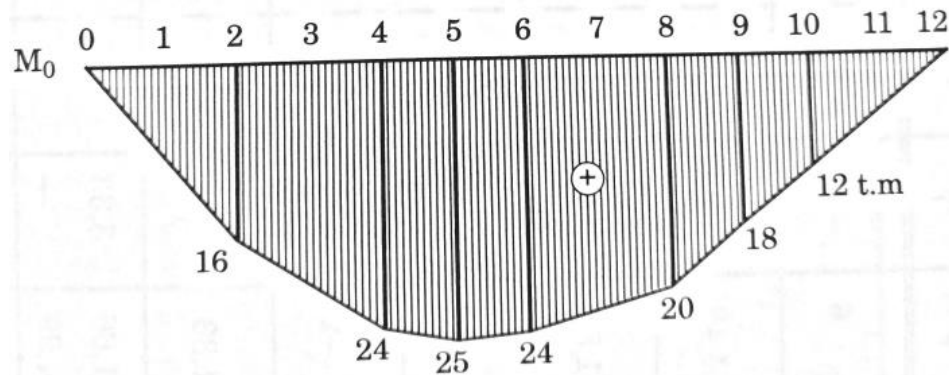
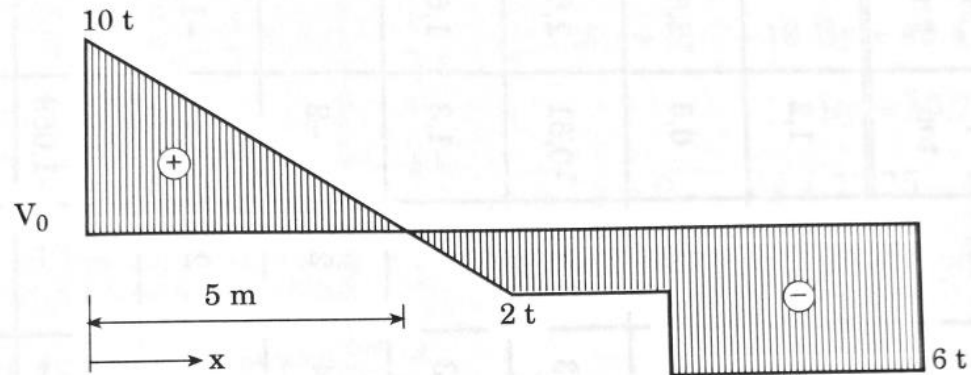
elde edilir.

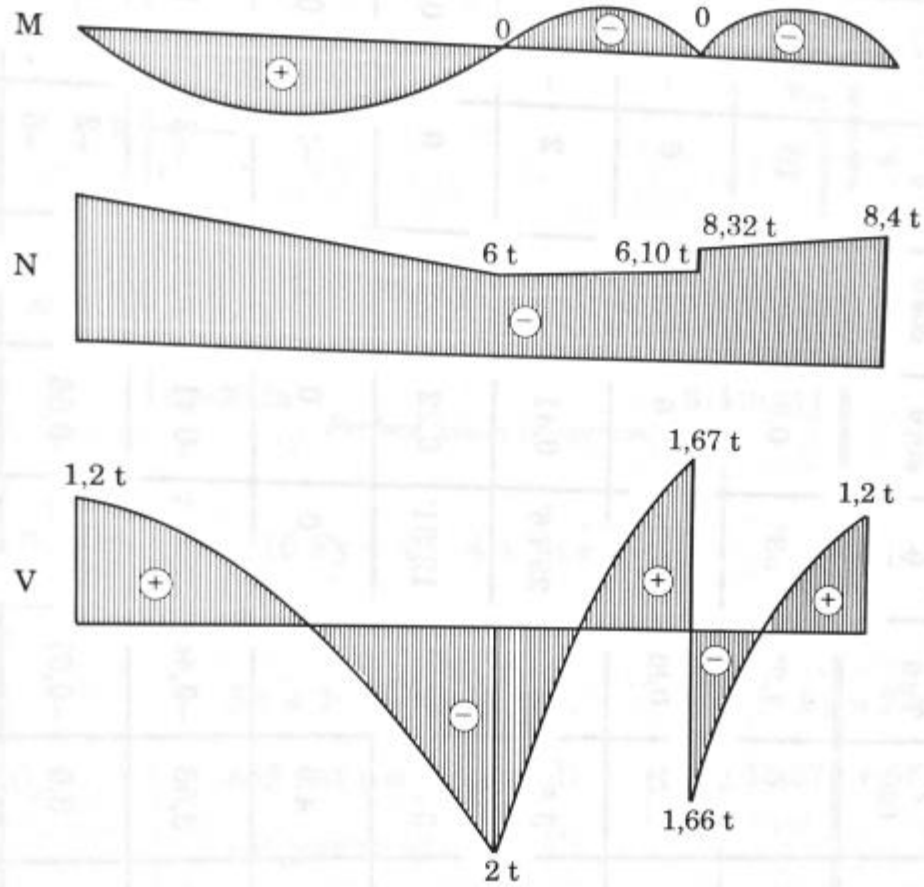
$$N = V_0 \sin \theta - H \cos \theta$$

$$H = Ax' \text{ dir.}$$

$$V = V_0 \cos \theta - H \cdot \sin \theta$$

$$M = M_0 - H \cdot y$$





Moment, kesme kuvveti ve Normal kuvvet diyagramları Tablo – 16.1'den alınan değerlere göre çizilmiştir.

$$N = -V_0 \cdot \sin \theta - H \cdot \cos \theta$$

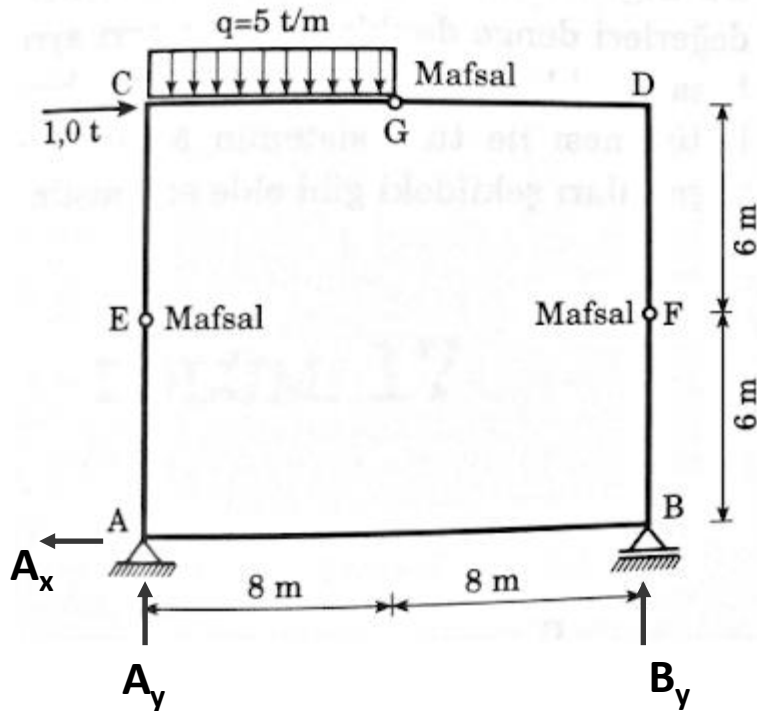
$$V = V_0 \cdot \cos \theta - H \cdot \sin \theta$$

$$M = M_0 - H \cdot y$$

$$H = Ax$$

x (m)	y (m)	Tgθ	θ	sin θ	cos θ	V ₀	$-V_0 \cdot \sin \theta$	$V_0 \cdot \cos \theta$	$-H \cdot \sin \theta$	$-H \cdot \cos \theta$	-H . y	M ₀ t.m	V ton	M t.m	N ton
0	0	1,33	53°	0,8	0,6	10	-8	6	-4,8	-3,6	0	0	1,2	0	-11,6
2	2,22	0,89	41°38'	0,66	0,75	6	-3,98	4,48	-3,98	-4,48	-13,3	16	0,5	2,67	-8,46
4	3,56	0,44	23°56'	0,41	0,91	2	-0,81	1,83	-2,44	-5,48	-21,3	24	-0,61	2,67	-6,29
5	3,89	0,22	12°31'	0,22	0,98	0	0	0	-1,3	-5,86	-23,3	25	-1,3	1,67	-5,86
6	4,0	0	0	0	1,0	-2	0	-2	0	-6	-24	24	-2	0	-6,0
8	3,56	-0,44	-23°56'	-0,41	0,91	-2	0,81	-1,83	2,44	-5,48	-21,3	20	0,61	-1,3	-6,29
9	3,0	-0,67	-33°43'	-0,56	0,83	-2 -6	-1,11 -3,33	-1,66 -4,99	3,33 —	-4,99 —	-18 —	18 —	1,67 -1,669	0	-6,10 -8,32
10	2,22	-0,89	-41°38'	-0,66	0,75	-6	-3,98	-4,48	3,98	-4,48	-13,3	12	-0,5	-1,33	-8,46
12	0	-1,3	-53°	-0,8	0,6	-6	-4,80	-3,6	4,8	-3,60	0	0	1,2	0	-8,40

ÖRNEK 16.5: Şekilde verilen üç mafsal çerçevenin mesnet reaksiyonlarını bulunuz, Moment. Kesme ve Normal kuvvet diyagramlarını çiziniz.



A – Mesnet Reaksiyonlarının bulunması

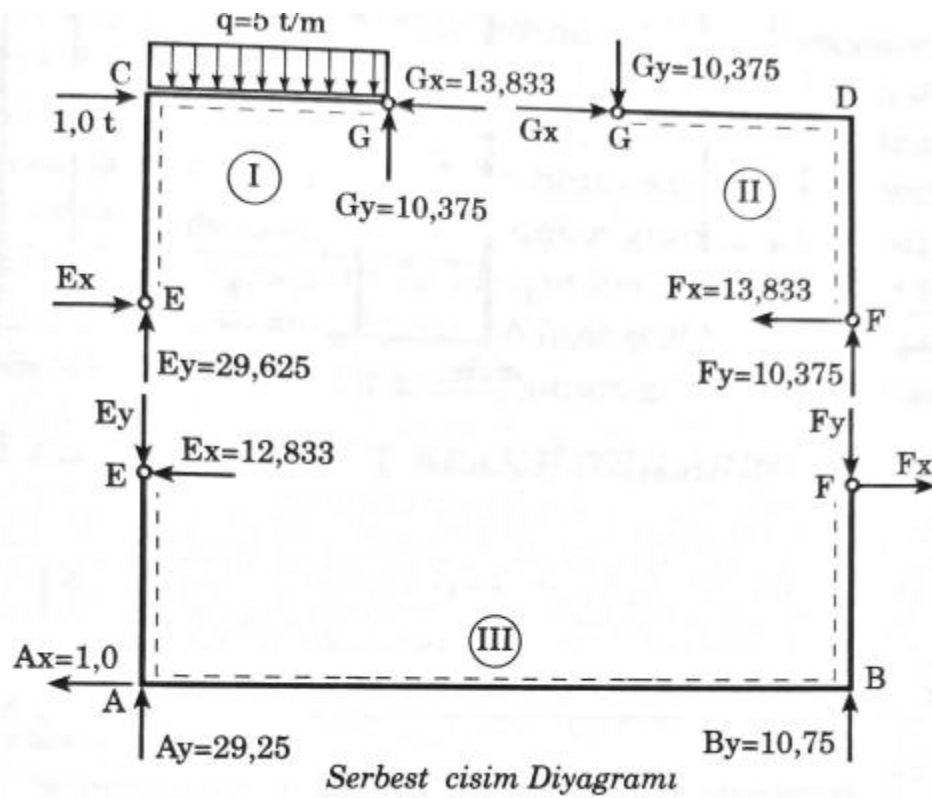
$$\rightarrow \sum X = 0, \quad 1.0 - A_x = 0, \quad A_x = 1.0 \text{ ton}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0, \quad -16 B_y + 40.4 + 1.12 = 0$$

$$B_y = 10,75 \text{ ton}$$

$$+\uparrow \sum y = 0, \quad A_y + 10,75 - 40 = 0$$

$$A_y = 29,25 \text{ ton}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_E = 0,$$

$$- 16 F_y + 40 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 0$$

$$F_y = 10,375 \text{ ton}$$

$$+ \uparrow \sum Y = 0,$$

üst yarım için (I ve II)

$$E_y + 10,375 - 40 = 0,$$

$$E_y = 29,625 \text{ t}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_G = 0,$$

sağ üst parça için (II)

$$- 8 \cdot 10,375 + 6 F_x = 0, F_x = 13,833 \text{ t}$$

$$+\rightarrow \sum X = 0,$$

üst yarım için I ve II)

$$1 + E_x - 13,833 = 0, E_x = 12,833 \text{ t}$$

$$\sum Y = 0,$$

$$\sum X = 0 \text{ sağ üst parça için (II)}$$

$$G_y = 10,375 \text{ ton} \quad G_x = 13,833 \text{ ton}$$

