YAPI STATİĞİ 2

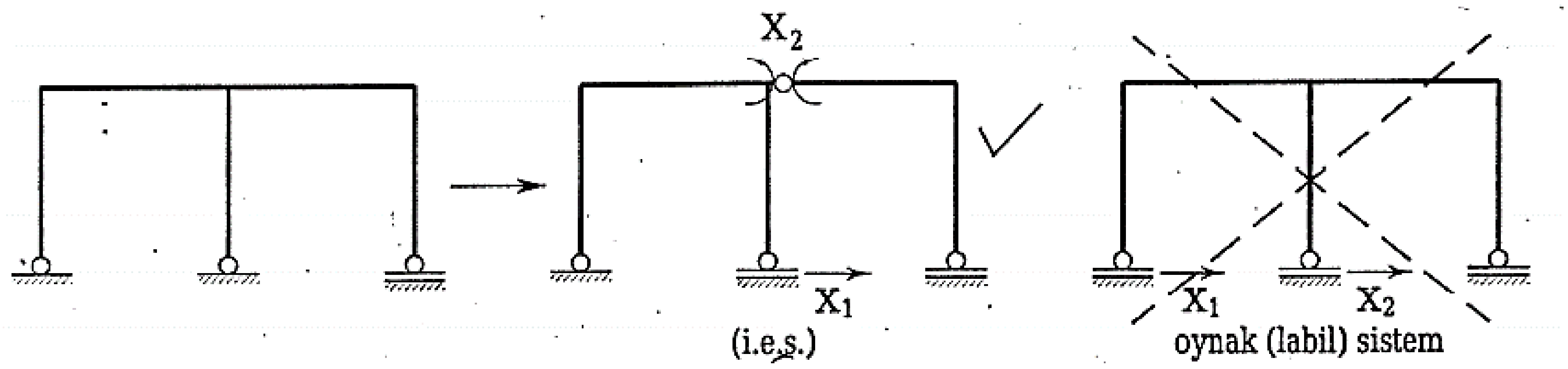
DERS NOTLARI(2-2)

Prof. Dr. Cengiz Dündar

Güncelleme Tarihi: 11 Mart 2024

İZOSTATİK ESAS SİSTEMİN SEÇİLMESİ

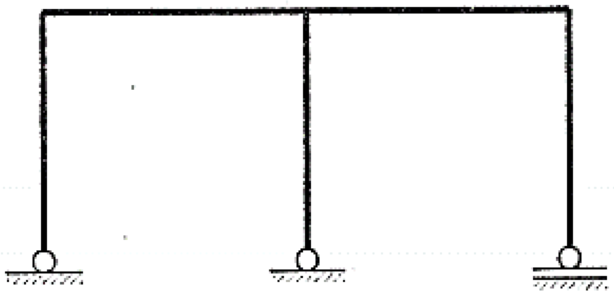
1- Seçilen izostatik sistem taşıyıcı olmalı, oynak (labil) olmamalıdır. Oynak sistem seçilmesi halinde bütün hesaplar anlamsız ve yanlış olacaktır.



n=3xk+r-m-3 n:hiperstatiklik derecesi; k:kapalı göz sayısı; r: mesnet tepkisi sayısı; m:mafsal sayısı

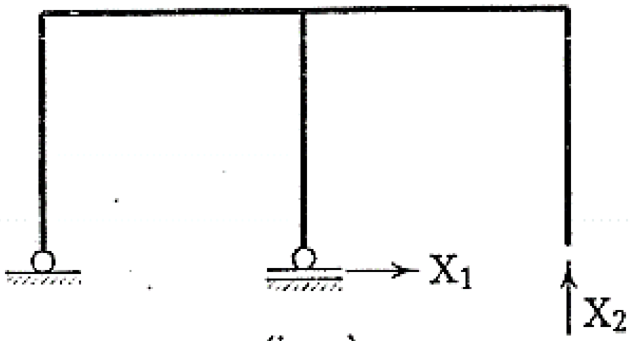
n=3x0+5-0-3=2 2. derece dıştan hiperstatik

2- Dıştan hiperstatik sistemlerde mesnet tepkileri ve/veya kesit zorları kaldırılarak izostatik esas sistem elde edilebilir.

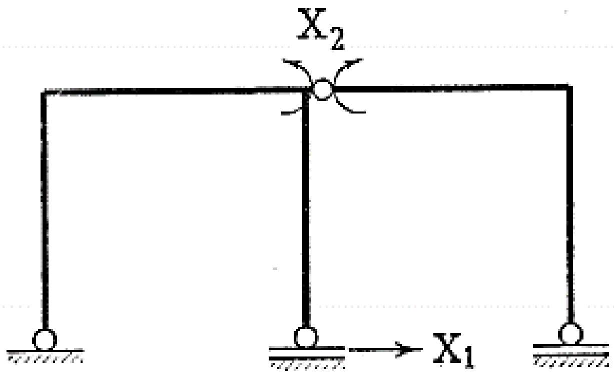


hiperstatik sistem

n=3x0+5-0-3=2   2. derece dıştan hiperstatik

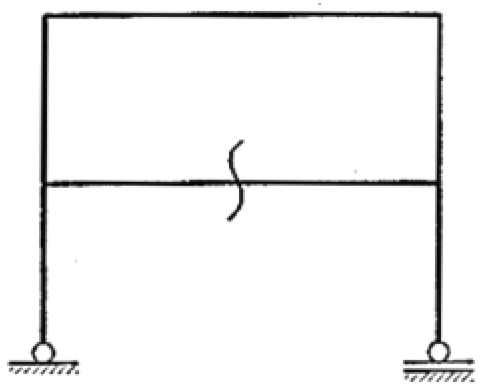


(i.e.s.)

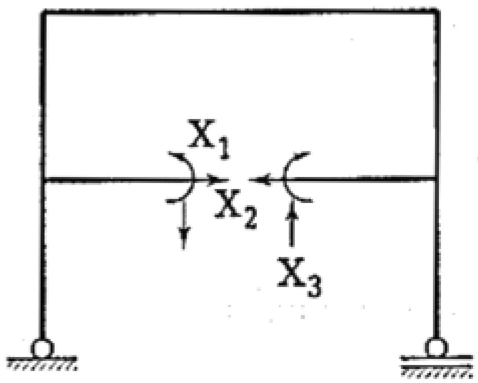


(i.e.s.)

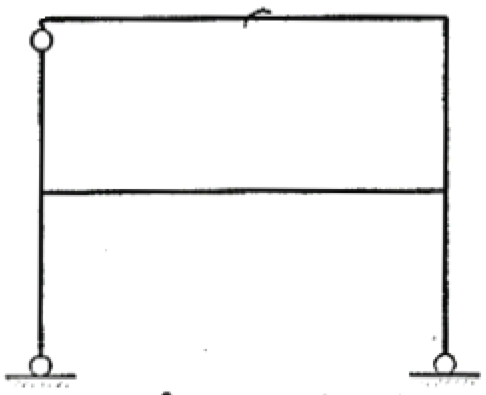
3- İçten hiperstatik sistemlerde mutlaka kesit zorları kaldırılarak izostatik esas sistem elde edilebilir. İçten ve dıştan hiperstatik sistemlerde ise en az içten hiperstatiklik derecesi kadar kesit zoru kaldırılmalıdır.



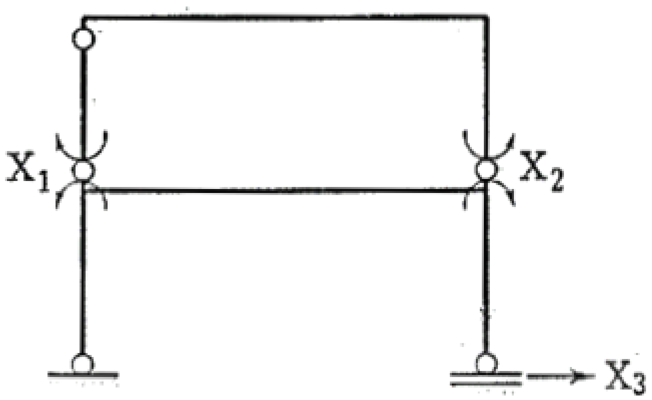
hiperstatik sistem (içten)



n=3x1+3-0-3=3   3. derece dıştan hiperstatik

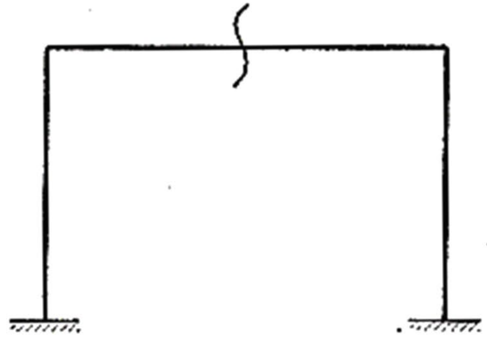


3° hiperstatik
(içten 2°, dıstan 1°)



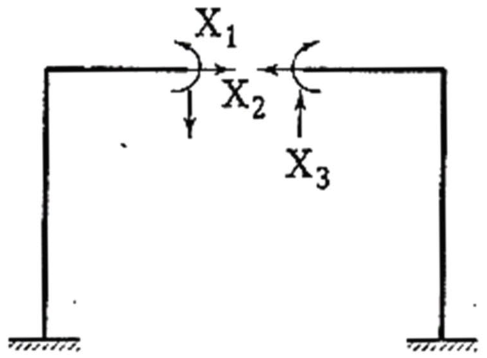
(i.e.s.)

4- Kesit zorlarının hiperstatik bilinmeyen olarak seçilmesi halinde birim yükleme bir çift kuvvet veya momenttir.

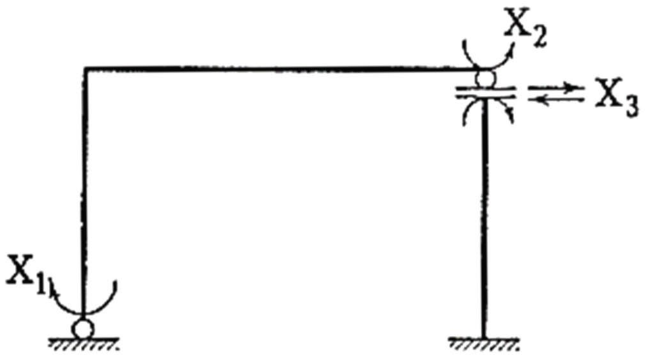


n=3x0+6-0-3=2   3. derece dıştan hiperstatik

3° hiperstatik



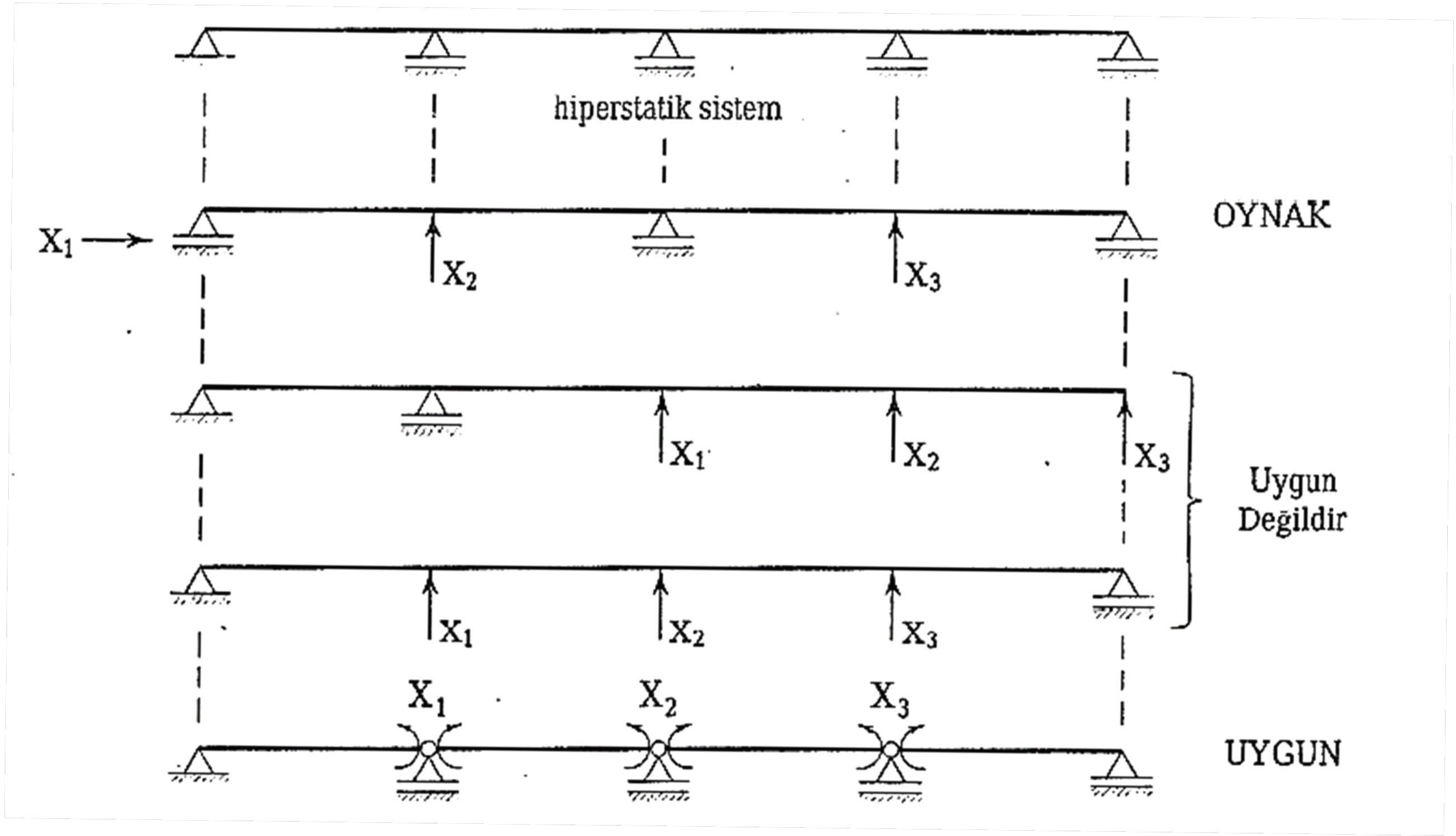
(i.e.s.)



(i.e.s.)

İzostatik esas sistem basit kiriş, basit çerçeve veya bunların birleşmesinden oluşan ve taşıma şeması kolayca çizilebilen bir sistem olmalıdır.

★ Açıklıklar çok büyük olmamalıdır.



HİPERSTATİK SİSTEMLERİN SICAKLIK ETKİSİ ALTINDA ÇÖZÜMÜ

- Sıcaklık değişiminden dolayı izostatik sistemde sadece deplasman oluşmasına karşın hiperstatik sistemde deplasmanla birlikte kesit tesirleri de meydana gelmektedir.

Süperpozisyon Denklemleri:

Hiperstatik sisteme dış etki olarak sıcaklık değişmesinin etkimesi halinde genel olarak süperpozisyon denklemlerinde bir değişiklik yoktur. Ancak, izostatik esas sistemde sıcaklık değişmesinden dolayı kesit zorları oluşmayacağından bu denklemlerde M_0 , N_0 , $T_0 = 0$ dır.

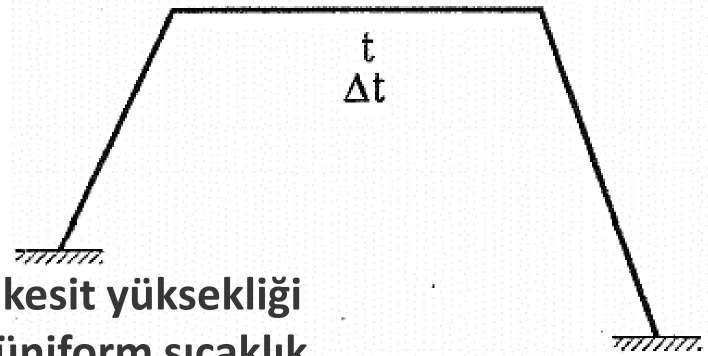
$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + \ldots\ldots + M_nX_n = \sum_{i=1}^{n} M_iX_i$$

$$N = N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 + \ldots\ldots + N_nX_n = \sum_{i=1}^{n} N_iX_i$$

$$T = T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 + \ldots\ldots + T_nX_n = \sum_{i=1}^{n} T_iX_i$$

Süreklilik Denklemleri

Sisteme yalnız sıcaklık değişmesi etkimesi halinde, geometrik uygunluk koşullarını ifade eden süreklilik denklemleri virtüel iş teoremi yardımıyla yeniden elde edilecektir.



d: kesit yüksekliği

t: üniform sıcaklık

Hiperstatik sistem

(virtüel şekildeğiştirme durumu)

İç kuvvetler : M , N , T

d: kesit yüksekliği

t: üniform sıcaklık=t_a=$t_ü$, $\Delta ds = \varepsilon t ds$

t_a=sistem içindeki sıcaklık

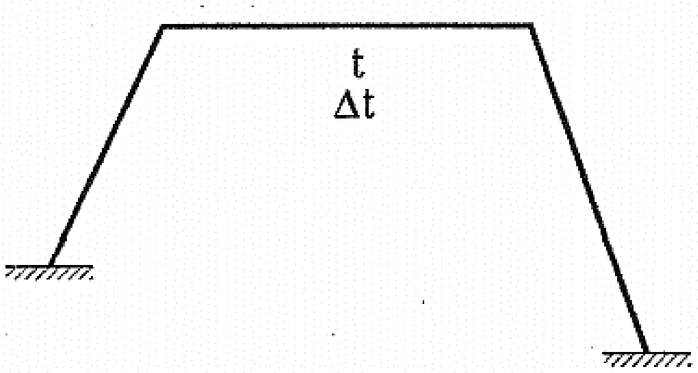
$t_ü$=sistem dışındaki sıcaklık

$\Delta t = t_a - t_ü$ farklı ısınma

$\Delta\varphi = (\varepsilon t_a ds - \varepsilon t_ü ds)/d = \varepsilon \Delta t ds/d$

Şekildeğiştirmeler :
$$\begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi}{ds} = \dfrac{M}{EI} + \dfrac{\varepsilon\Delta t}{d} \\ \dfrac{\Delta ds}{ds} = \dfrac{N}{EF} + \varepsilon t \\ \dfrac{\Delta v}{ds} = \dfrac{T}{GF'} \end{cases}$$

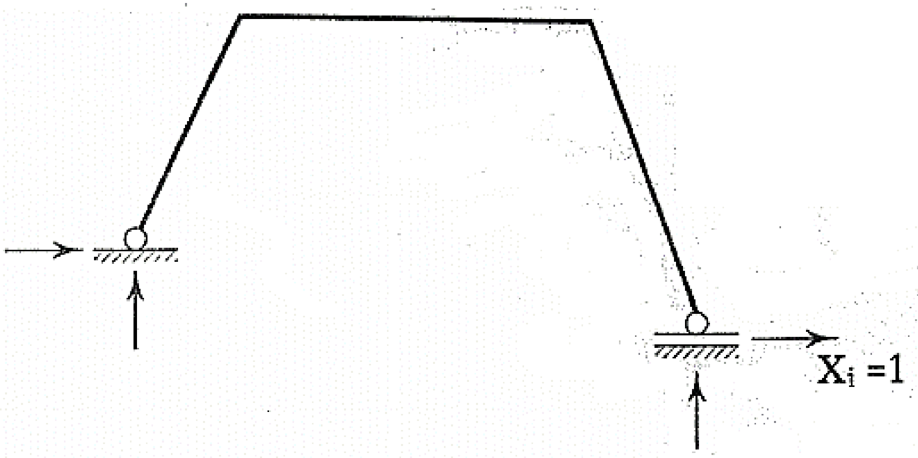
Şekildeğiştirmeler :
$$\begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi}{ds} = \dfrac{M}{EI} + \dfrac{\varepsilon\Delta t}{d} \\ \dfrac{\Delta ds}{ds} = \dfrac{N}{EF} + \varepsilon t \\ \dfrac{\Delta v}{ds} = \dfrac{T}{GF'} \end{cases}$$



Hiperstatik sistem

(virtüel şekildeğiştirme durumu)

İç kuvvetler : M , N , T

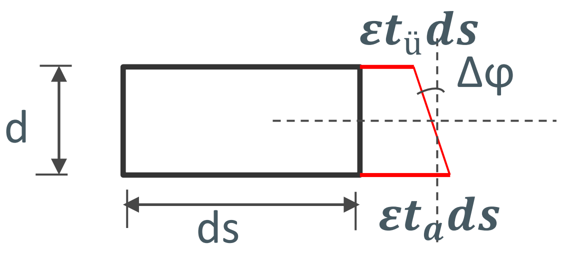


İzostatik esas sistemde $X_i = 1$ yüklemesi

(yükleme durumu)

İç kuvvetler : M_i , N_i , T_i

$$\Delta t = t_a - t_ü$$



$$\Delta\varphi = \frac{\varepsilon t_a ds - \varepsilon t_ü ds}{d} = \frac{\varepsilon\Delta t ds}{d}$$

d: kesit yüksekliği **ε=uzama katsayısı**

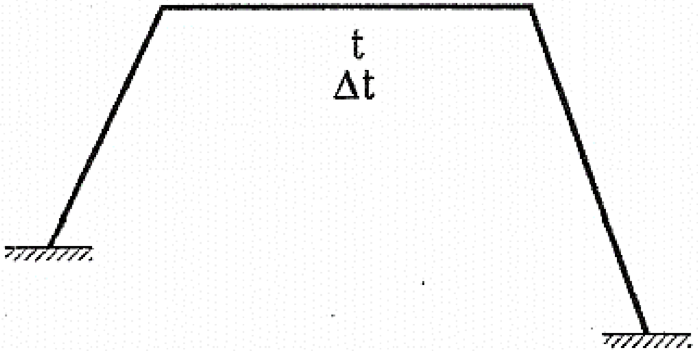
t: üniform sıcaklık=t_a=$t_ü$, Δds=εtds **Δds/ds=εt**

t_a=sistem içindeki sıcaklık

$t_ü$=sistem dışındaki sıcaklık

$\Delta t = t_a - t_ü$ farklı ısınma

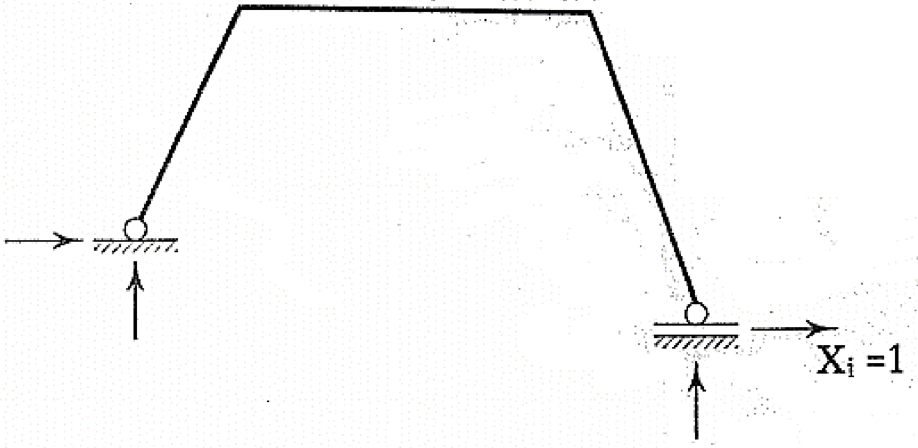
$\Delta\varphi = (\varepsilon t_a ds - \varepsilon t_ü ds)/d = \varepsilon\Delta t ds/d$ **Δφ/ds = εΔt/d**



Hiperstatik sistem

(virtüel şekildeğiştirme durumu)

İç kuvvetler : M , N , T



İzostatik esas sistemde $X_i = 1$ yüklemesi

(yükleme durumu)

İç kuvvetler : M_i , N_i , T_i

İç kuvvetlerin işi=Dış kuvvetlerin işi

$$\int \left(M_i \frac{\Delta\varphi}{ds} + N_i \frac{\Delta ds}{ds} + T_i \frac{\Delta v}{ds} \right) ds = 0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds + \int M_i \frac{\varepsilon \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon t ds = 0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n) \quad \textbf{KSD}$$

Bu Kapalı Süreklilik Denkleminde

$$\delta_{it} = \int M_i \frac{\varepsilon \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon t ds$$

M , N , T nin süperpozisyon denklemindeki ifadeleri yerlerine konularak Kapalı Süreklilik Denklemi yeniden düzenlenirse

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \delta_{i3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{in}X_n + \delta_{it} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \ldots\ldots, n)$$

i=1, 2, 3,......, n için bu denklemler açık şekilde yazılırsa;

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1t} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2t} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{3n}X_n + \delta_{3t} = 0$$

....

....

....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nt} = 0$$

olarak **Açık Süreklilik Denklemleri** elde edilir.

Açık Süreklilik Denklemindeki katsayı ve sabitler

δ_{ik} : $X_k = 1$ yüklemesinden dolayı X_i bilinmeyeni doğrultusunda oluşan yerdeğiştirmedir. Denklem takımının katsayıları adını alır. Bu terim

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int \frac{T_i T_k}{GF'} ds$$

şeklinde elde edilir.

Betti karşıtlık teoremi uyarınca $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ bağıntısı vardır.

δ_{it} : İzostatik esas sistemde sıcaklık değişmesinden dolayı X_i hiperstatik bilinmeyeni doğrultusunda oluşan yerdeğiştirmedir. Sıcaklık değişmesi sabiti adını alır.

Δt farklı sıcaklık değişmesi terimi : $\int M_i \frac{\varepsilon \Delta t}{d} ds$ **d: kesit yüksekliği**

t düzgün sıcaklık değişmesi terimi : $\int N_i \varepsilon t ds$

$$\Rightarrow \delta_{it} = \int M_i \frac{\varepsilon \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon t ds$$

Her çubuk boyunca t , Δt , ε ve d nin sabit olması özel halinde

$$\delta_{it} = \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\varepsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \varepsilon t \int N_i ds \right]$$

şeklinde yazılır. Burada; $\int M_i ds$, $\int N_i ds$ çubuk üzerindeki M_i , N_i diyagramlarının alanıdır.

HESAPTA İZLENEN YOL

1- İzostatik esas sistem seçilir ve hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.

2- $X_i = 1$ birim yüklemeleri yapılarak gerekli kesit zorları diyagramları çizilir. Sisteme düzgün sıcaklık değişmesi etkimesi halinde N_i diyagramları mutlaka çizilmelidir.

3- δ_{ik} ve δ_{it} terimleri hesaplanır. Hesapta $EI_c\delta_{ik}$ terimleri kullanılıyorsa sıcaklık değişmesi terimleride $EI_c\delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\varepsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \varepsilon t \int N_i ds \right]$ şeklinde yazılmalıdır.

Not: Sıcaklık değişmesine göre hesapta sonucun sayısal olarak elde edilebilmesi için EI_c nin sayısal değerinin bilinmesi gereklidir.

4- Denklem takımı çözülerek X_i bilinmeyenleri bulunur.

5- M , N , T kesit zorları diyagramları çizilir. Bunun için iki yoldan yararlanılabilir.

a) Süperpozisyon denklemleri ile $(M = M_1X_1 + M_2X_2 + ... + M_nX_n)$

b) İzostatik esas sisteme hiperstatik bilinmeyenler yüklenir ve diyagramlar çizilir.

6- KSD ile kontrol edilir.

$$\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds + \delta_{it} = 0 \quad (i=1, 2, 3, ..., n)$$

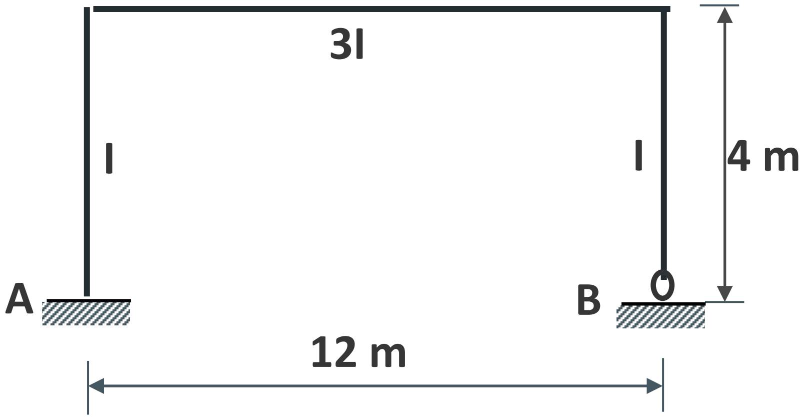
veya uzama ile kayma şekildeğiştirmeleri terkedilirse Kapalı Süreklilik Denklemi,

$$\int M_i M \frac{I_c}{I} ds + EI_c \delta_{it} = 0$$

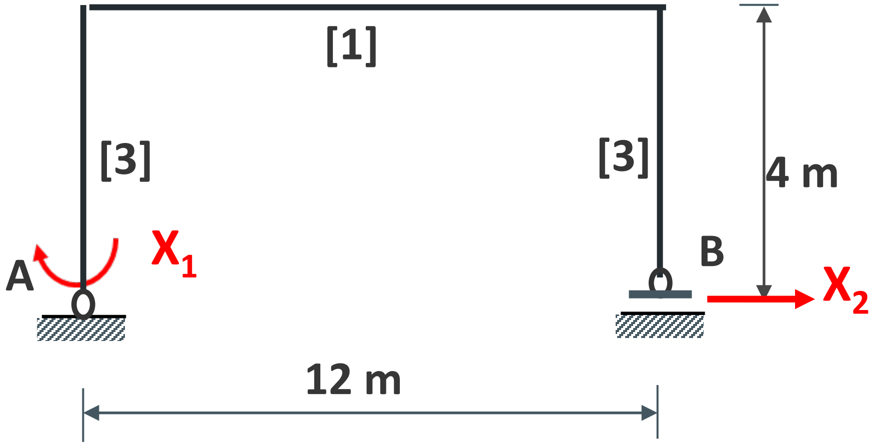
olarak elde edilir.

Not: Bu kontrolde δ_{it} terimleri kontrol edilemez.

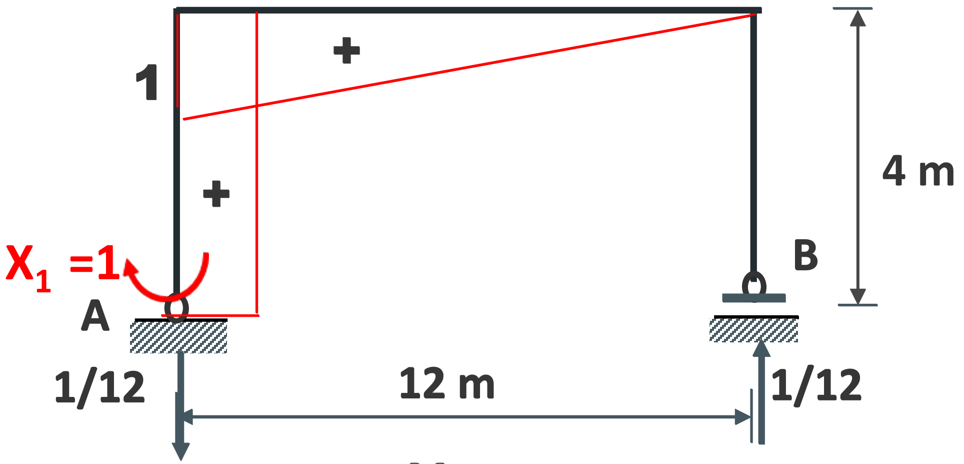
UYGULAMA (sıcaklık değişimi)
Şekildeki sistemin Moment diyagramını çiziniz.



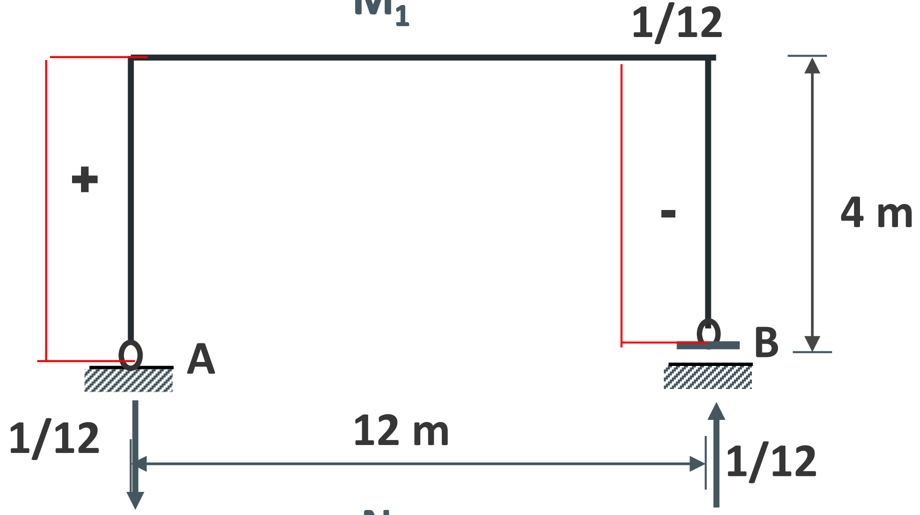
$E=2.1*10^6$ t/m^2
$\varepsilon=10^{-5}$
I=80 dm^4
$t_a = t_ü = t_s$ =20 °C



X_1=1 birim yüklemesi

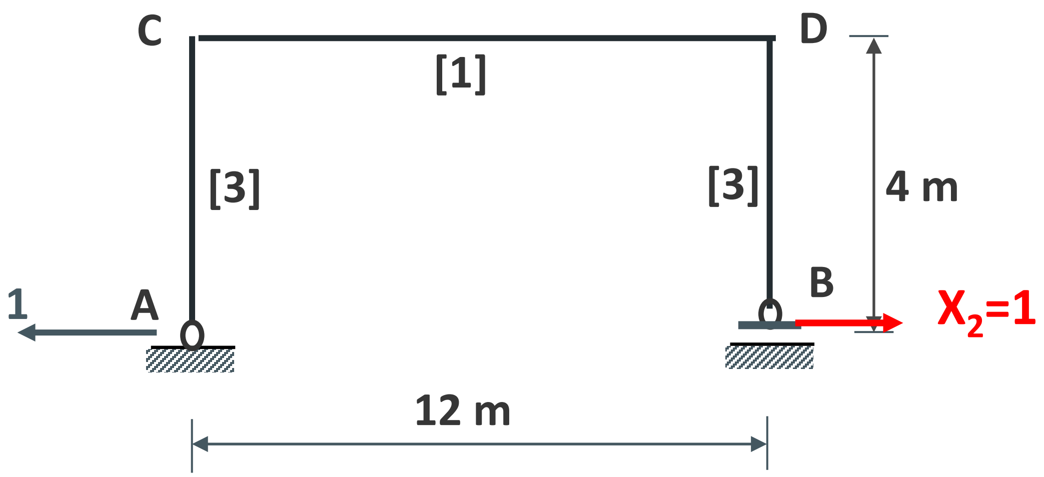


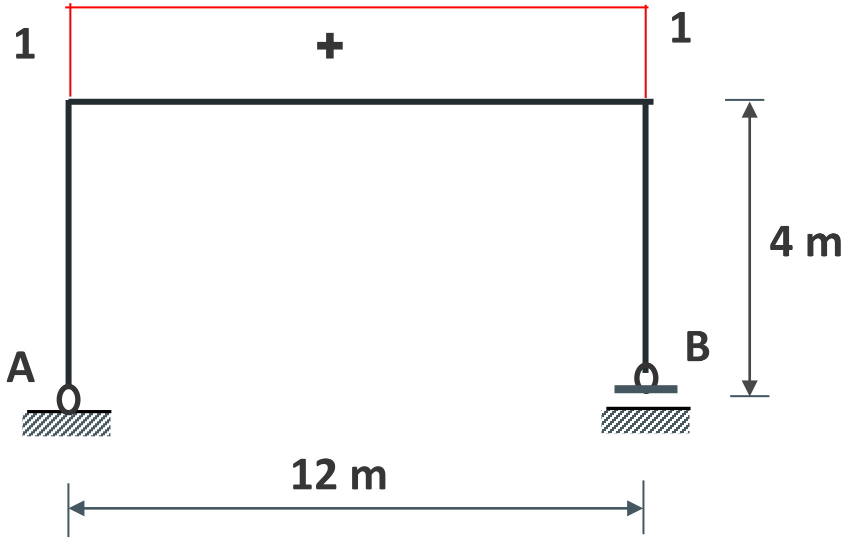
M_1



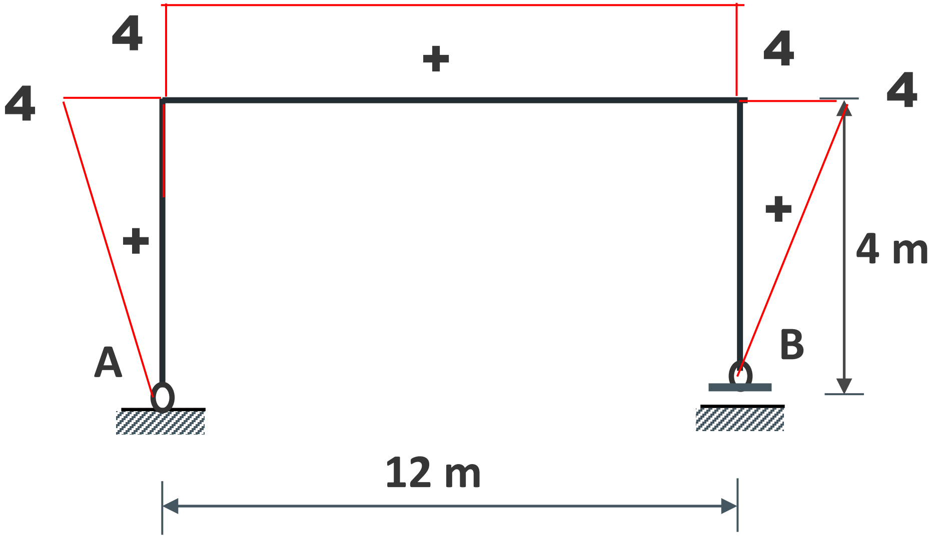
N_1

X_2=1 birim yüklemesi





N_2



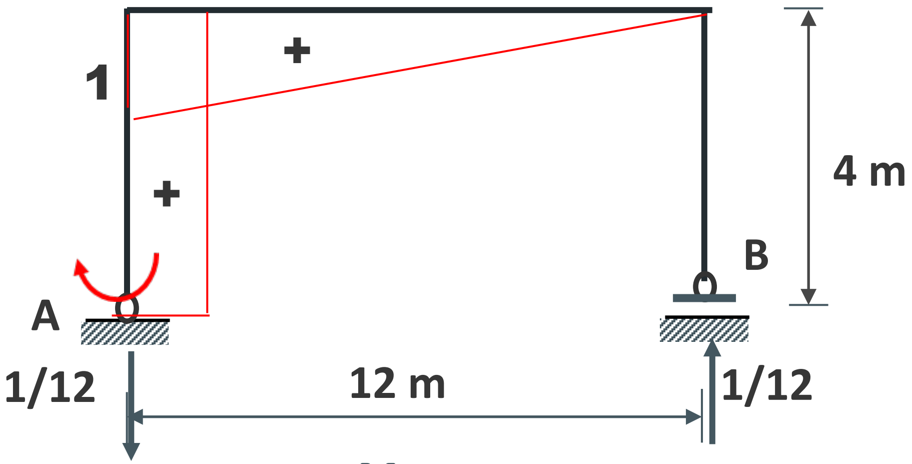
M_2

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \qquad EI_c\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds$$

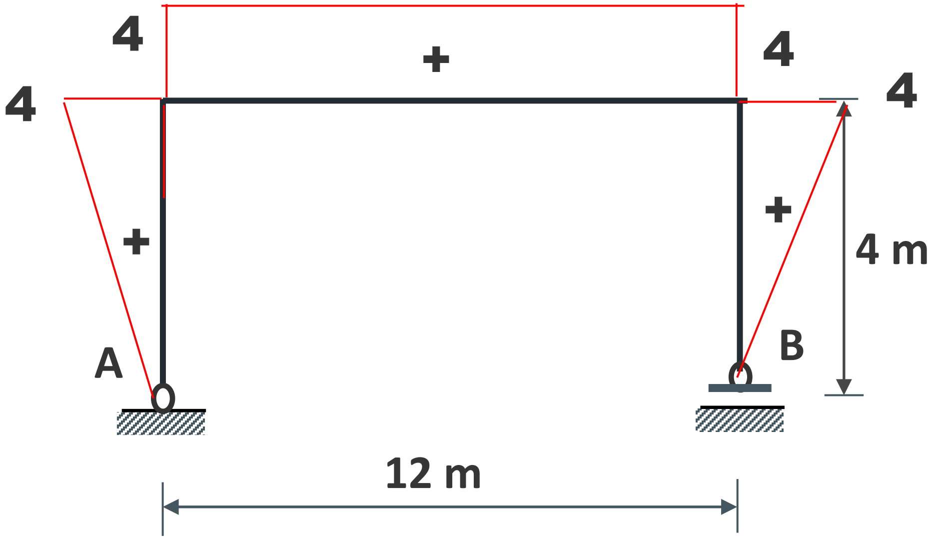
$$EI_c\delta_{11} = 4 * 1 * 1 * [3] + \frac{1}{3} * 12 * 1 * 1 * [1] = 12 + 4 = 16$$

$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \frac{1}{2} * 4 * 4 * 1 * [3] + \frac{1}{2} * 12 * 1 * 4 * [1]$$
$$= 24 + 24 = 48$$

$$EI_c\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 * [3]\right) + 12 * 4 * 4 * [1] = 320$$

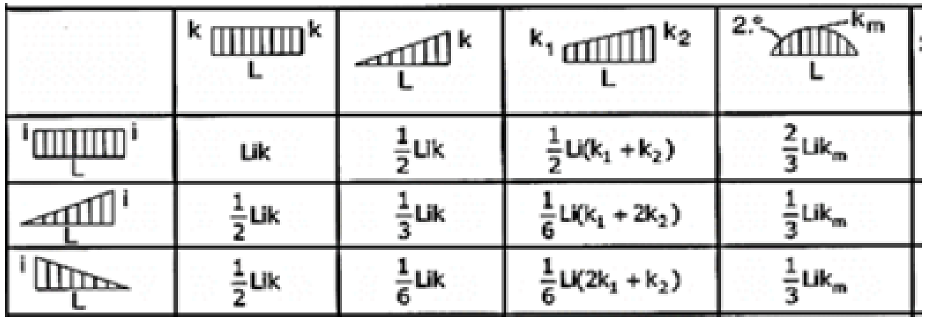


M_1



M_2

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \qquad EI_c\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds$$



	k, k, L	k, L	k_1, k_2, L	2°, k_m, L
i, i, L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1+k_2)	$\frac{2}{3}$Lik$_m$
i, L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1+2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$
i, L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li($2k_1+k_2$)	$\frac{1}{3}$Lik$_m$

$$EI_c\delta_{11} = 4 * 1 * 1 * [3] + \frac{1}{3} * 12 * 1 * 1 * [1] = 12 + 4 = 16$$

$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \frac{1}{2} * 4 * 4 * 1 * [3] + \frac{1}{2} * 12 * 1 * 4 * [1] = 24 + 24 = 48$$

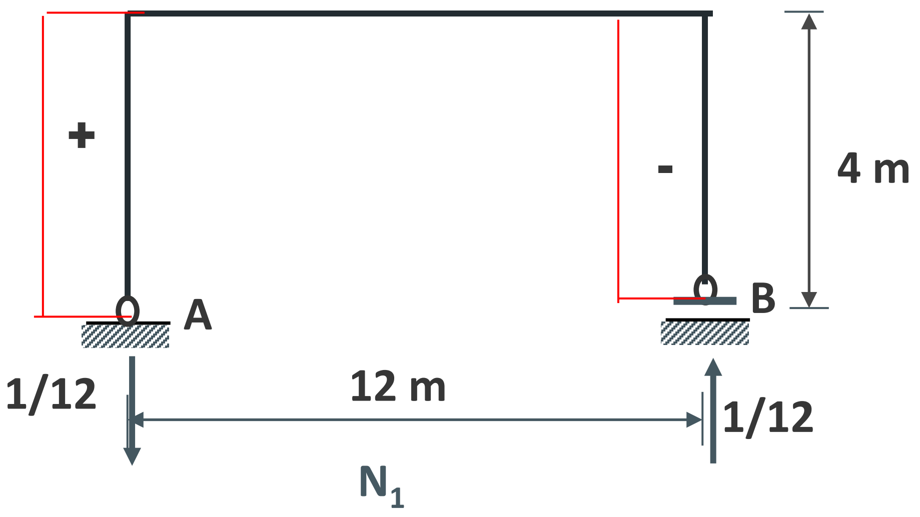
$$EI_c\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 * [3]\right) + 12 * 4 * 4 * [1] = 320$$

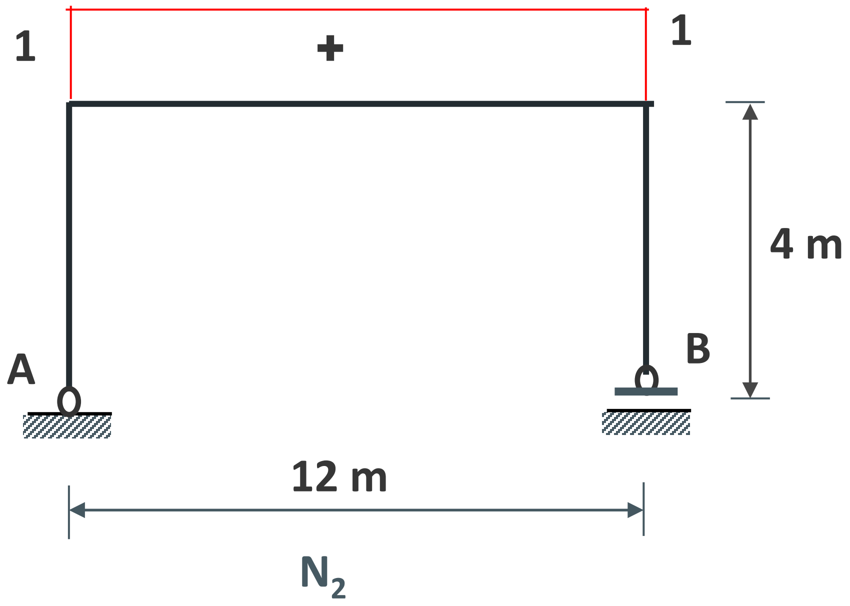
$$EI_c \varepsilon t_s = 2.1 * 10^6 * (3 * 80 * 10^{-4}) * 10^{-5} * 20 = 10.08$$

$$EI_c \delta_{1t} = EI_c \varepsilon t_s \int N_1 ds = 0$$

$$\frac{1}{12} * 4 - \frac{1}{12} * 4 = 0$$

$$EI_c \delta_{2t} = EI_c \varepsilon t_s \int N_2 ds = 10.08 * [1 * 12] = 120.96$$





$$EI_c \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + EI_c \begin{Bmatrix} \delta_{1t} \\ \delta_{2t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$EI_c\delta_{11}X_1 + EI_c\delta_{12}X_2 + EI_c\delta_{1t} = 0$$

$$EI_c\delta_{21}X_2 + EI_c\delta_{22}X_2 + EI_c\delta_{2t} = 0$$

$$16X_1 + 48X_2 + 0 = 0$$

$$48X_1 + 320X_2 + 120.96 = 0$$

$$X_1 = 2.062\ tm \qquad X_2 = -0.687\ t$$

$X_1 = 2.062\ tm \qquad X_2 = -0.687\ t$

$M = M_1 X_1 + M_2 X_2$

$M_0 = 0 \text{ dış yük} = 0$

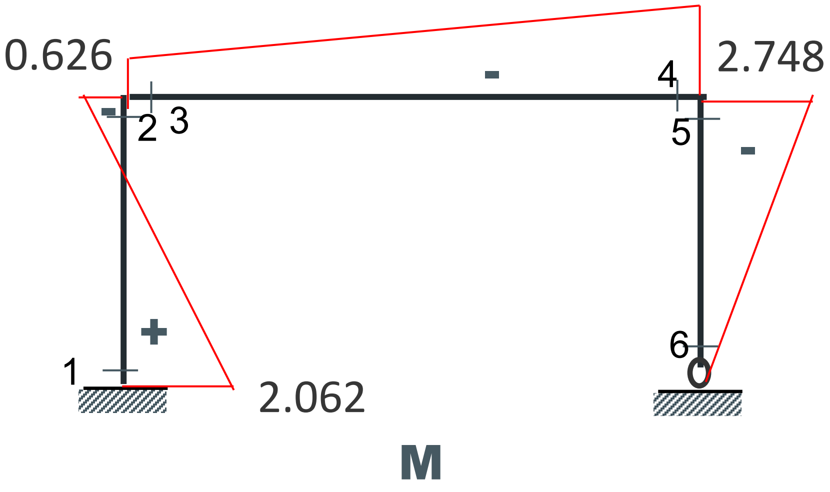
$M_{(1)} = 1 * 2.062 + 0 * (-0687) = 2.062\ tm$

$M_{(2)} = 1 * 2.062 + 4 * (-0.687) = -0.626\ tm$

$M_{(3)} = M_{(2)} = -0.626\ tm$

$M_{(4)} = 0 * 2.062 + 4 * (-0.687) = -2.748 tm$

$M_{(5)} = M_{(4)} = -2.748\ tm \qquad M_{(6)} = 0$



ÖRNEK 6

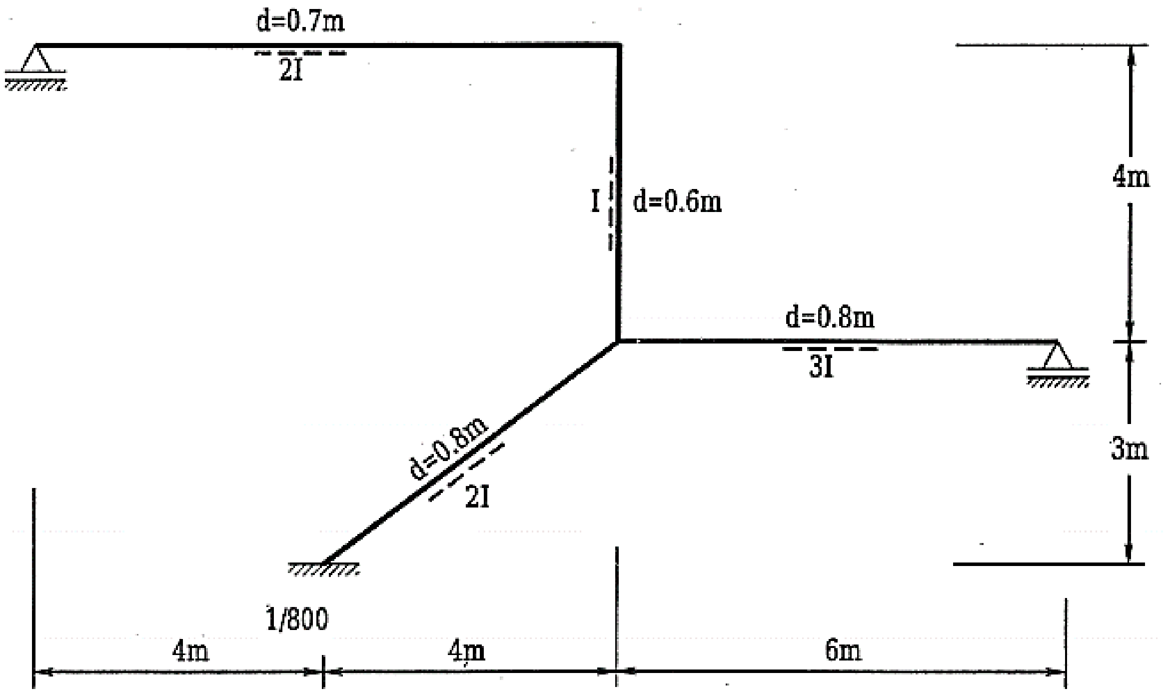
Şekilde verilen hiperstatik sistemde;

a) t=+20 °C düzgün sıcaklık değişmesi sonucu oluşan M diyagramını belirleyiniz.

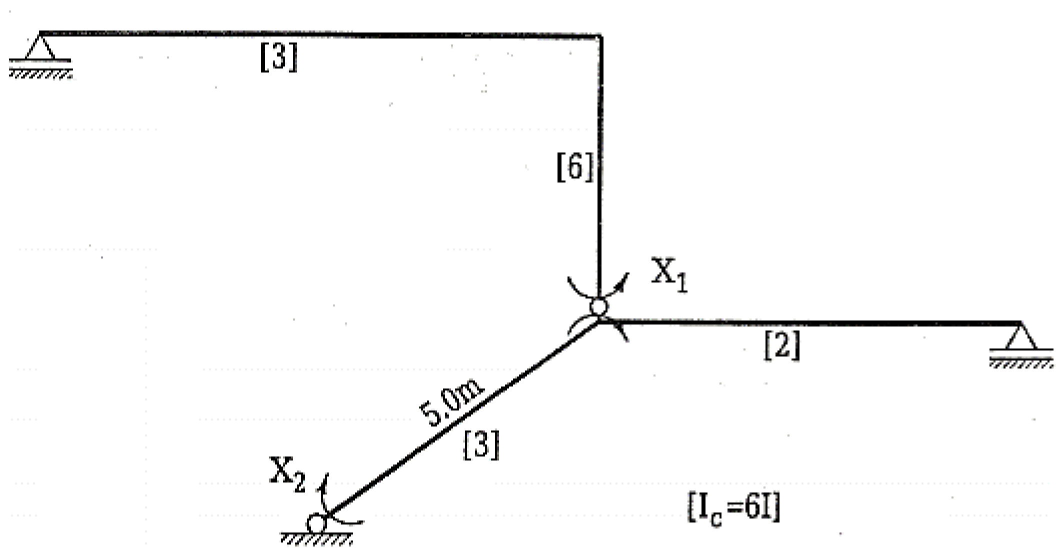
b) Δt=+15 °C farklı sıcaklık değişmesi sonucu oluşan M diyagramını belirleyiniz.

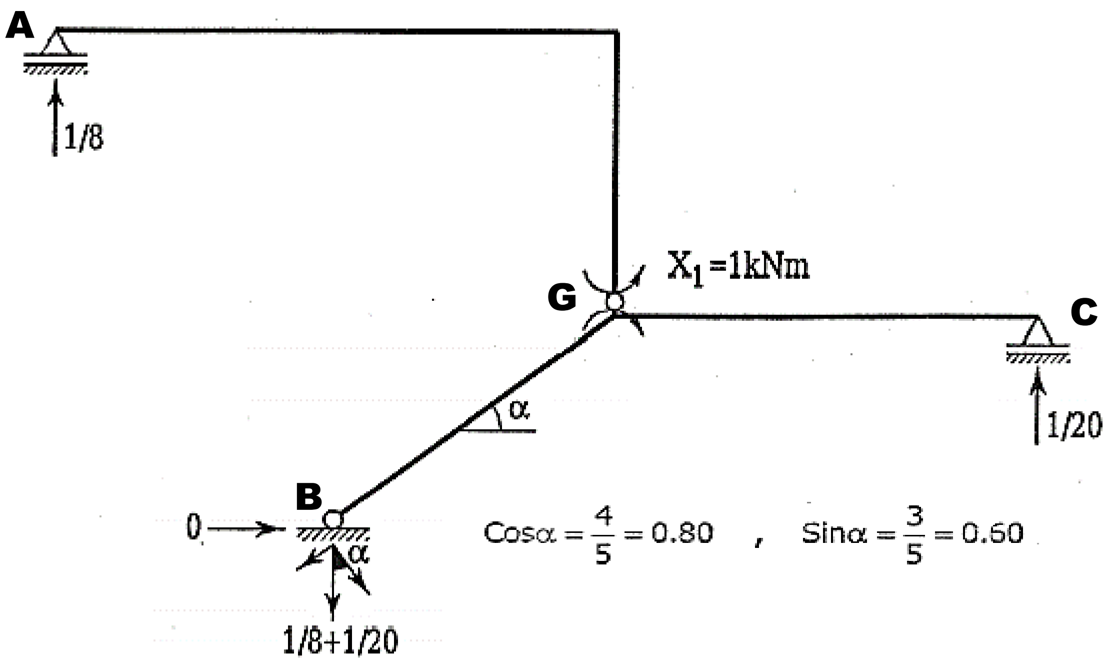
a) E=100000 kN/m² $\varepsilon=10^{-5}$ $I_c=6\,I$
$t_a = t_ü = t_s = 20\ °C$

b) E=100000 kN/m² $\varepsilon=10^{-5}$ $I_c=6\,I$
Δt=15 °C



n=3x0+5-0-3=2   2. derece hiperstatik



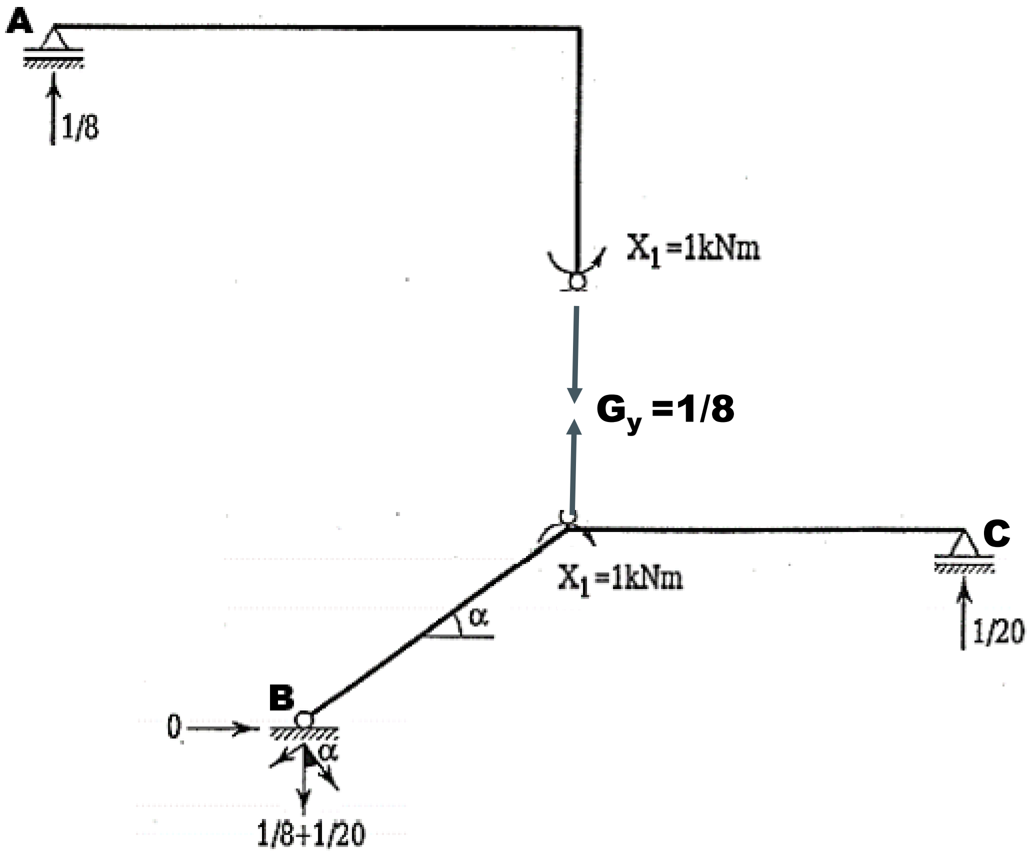


$$\circlearrowleft^{+} \sum M_{G_{sol}} = 0 \;\rightarrow -A_y * 8 + 1 = 0 \;\rightarrow A_y = \frac{1}{8}\, kN$$

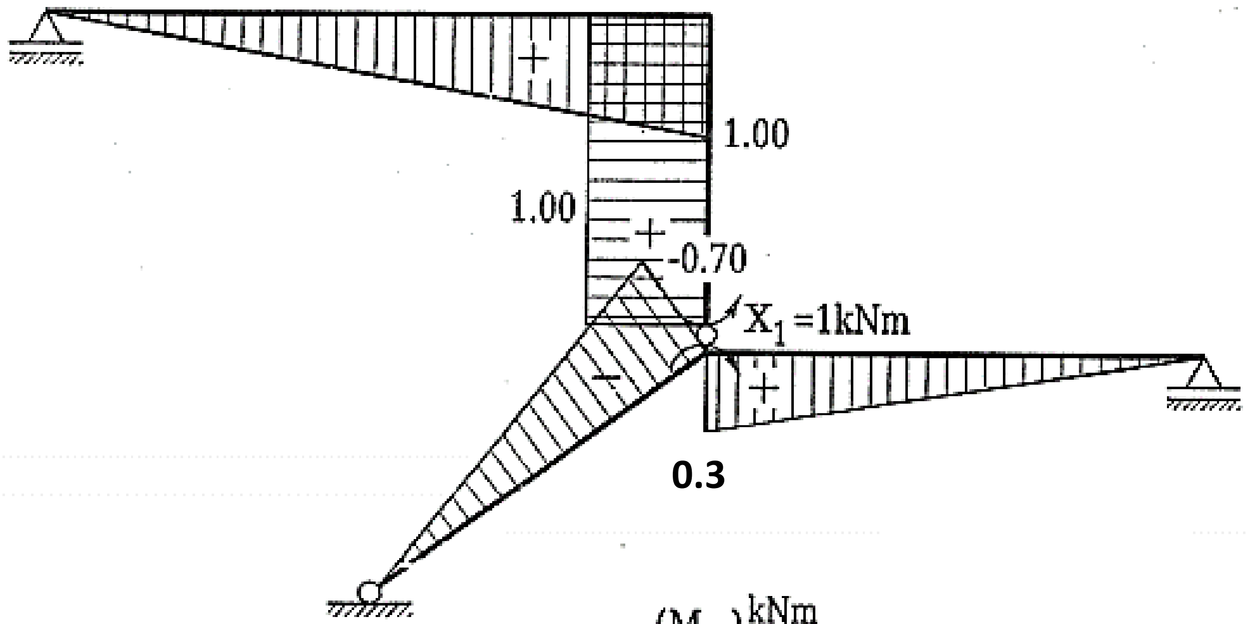
$$\rightarrow^{+} \sum F_x = 0 \;\rightarrow B_x = 0\, kNm \quad \uparrow^{+} \sum F_y = 0 \;\rightarrow A_y + B_y + C_y = 0 \rightarrow B_y = -\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{20}\right) = -\frac{7}{40}\, kN$$

$$\circlearrowleft^{+} \sum M_B = 0 \;\rightarrow C_y * 10 - \frac{1}{8} * 4 = 0 \;\rightarrow C_y = \frac{1}{20}\, kN$$

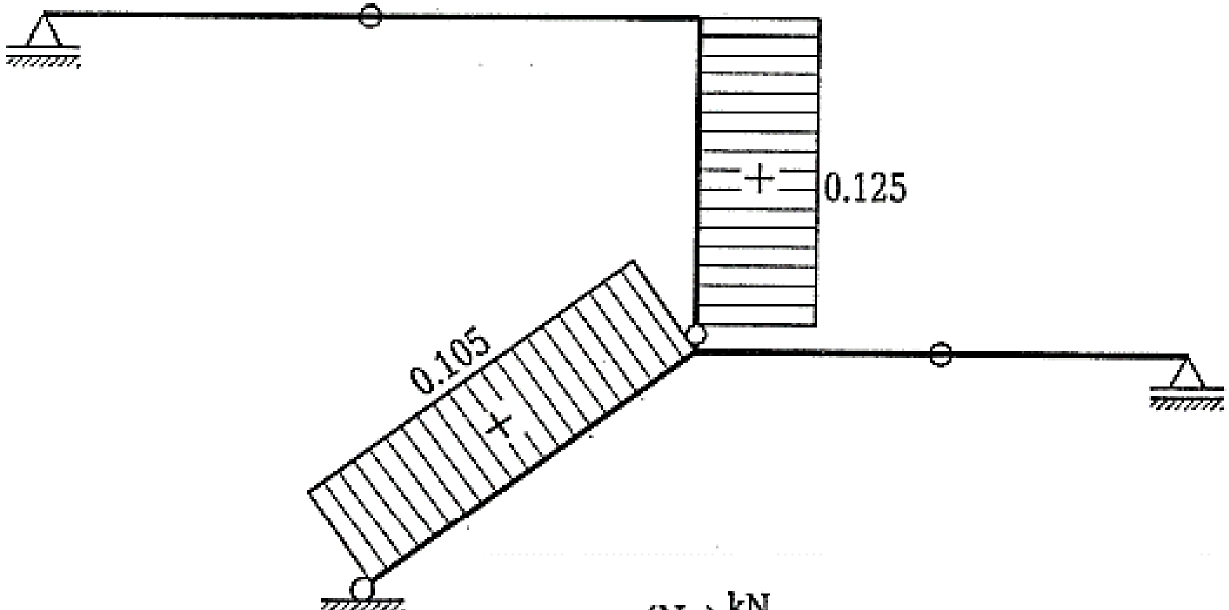
Alternatif yol



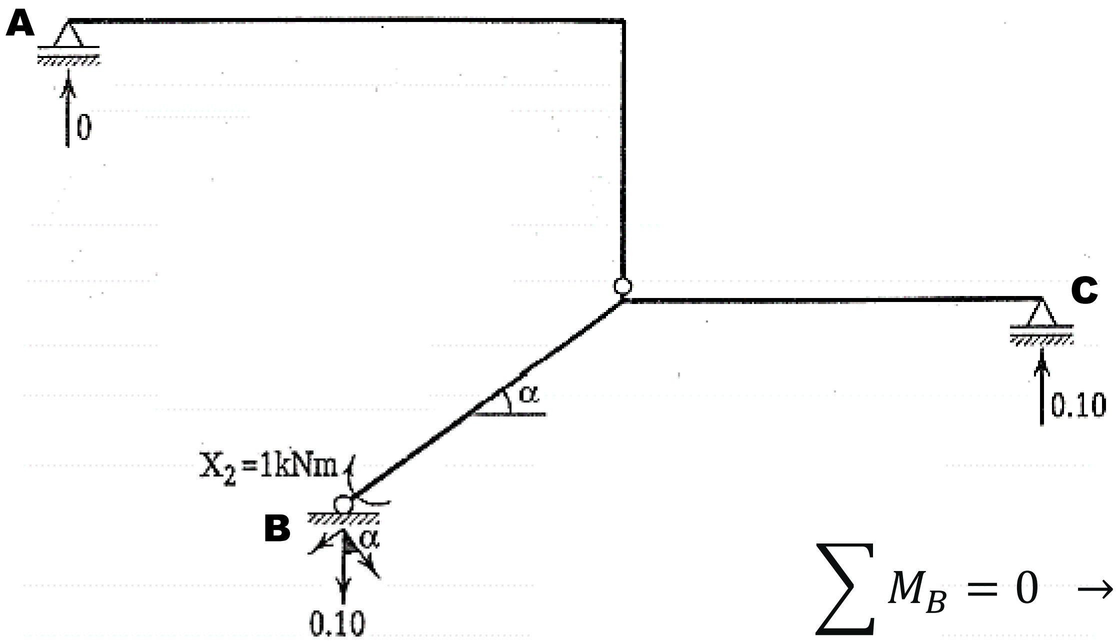
$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 \;\rightarrow C_y * 10 + \frac{1}{8} * 4 - 1 = 0 \;\rightarrow C_y * 10 = 1 - \frac{1}{2} \rightarrow C_y = \frac{1}{20}\; kN$$



$(M_1)^{kNm}$



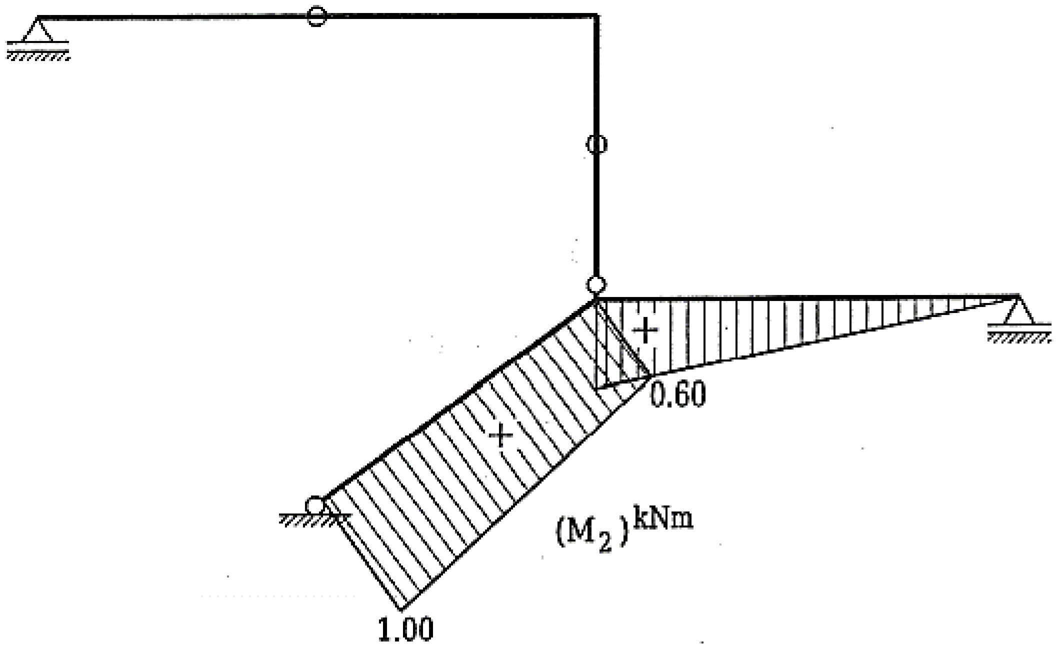
$(N_1)^{kN}$

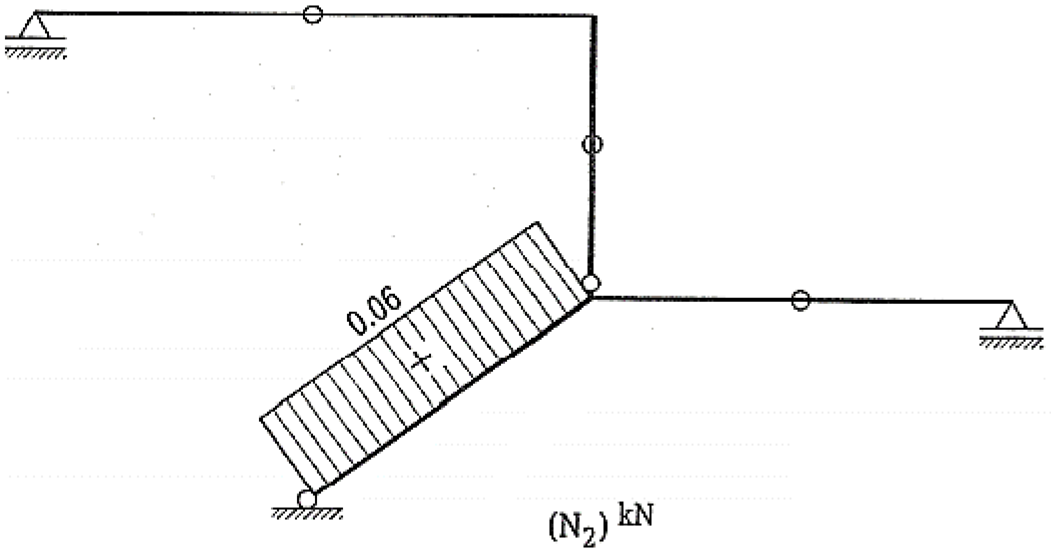


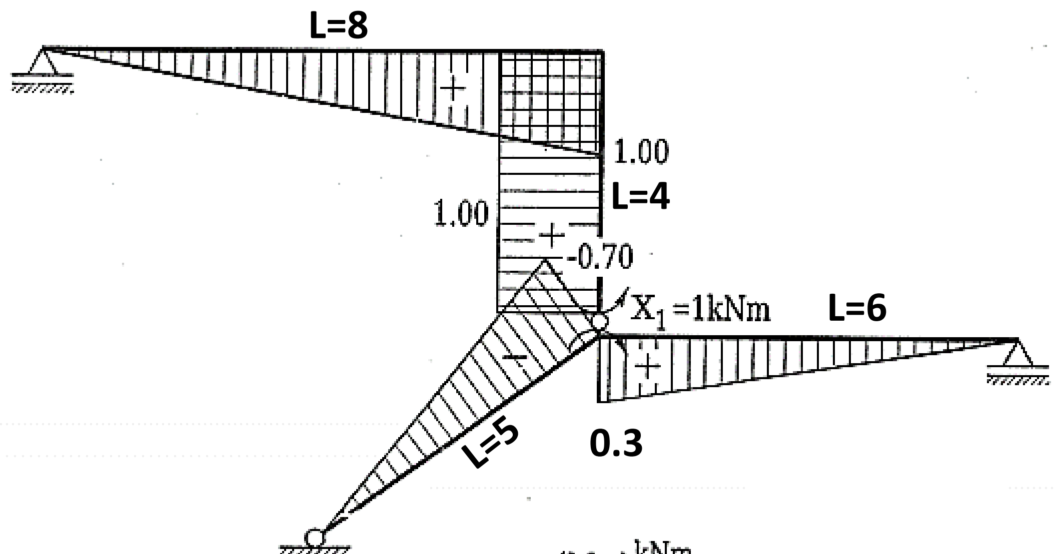
$$\sum M_{G_{sol}} = 0 \ \rightarrow -A_y * 8 = 0 \ \rightarrow A_y = 0 \ kN$$

$$\sum M_B = 0 \ \rightarrow C_y * 10 - 1 = 0 \ \rightarrow C_y = \frac{1}{10} \ kN$$

$$\sum F_y = 0 \ \rightarrow A_y + B_y + C_y = 0 \rightarrow B_y = -\frac{1}{10} kN$$


0.60
1.00
$(M_2)^{kNm}$


0.06
(N_2) kN

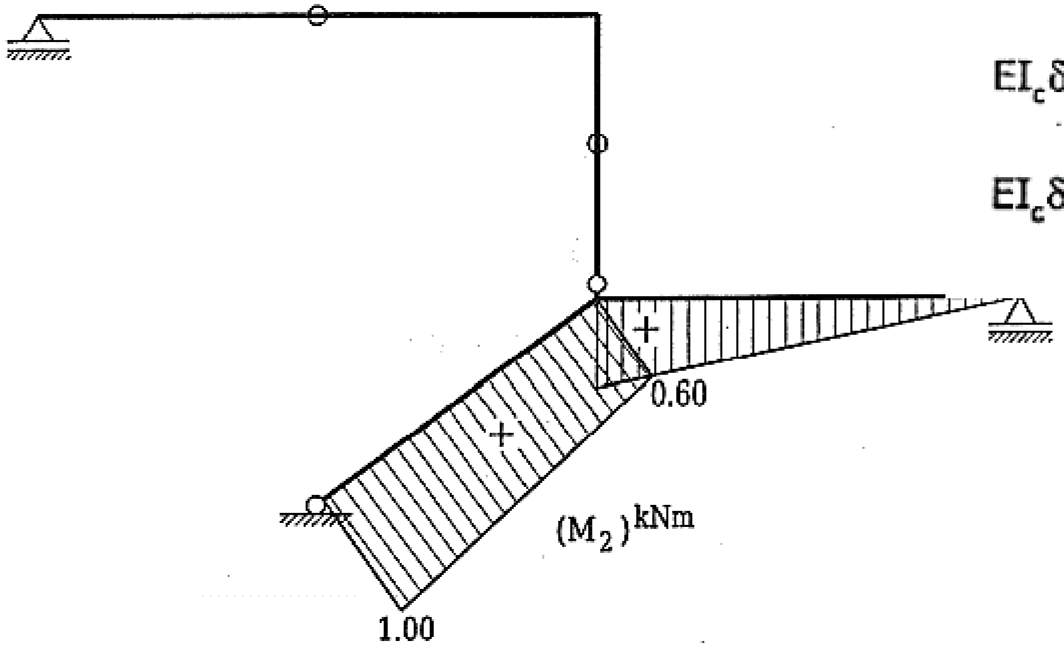


$(M_1)^{kNm}$

	k k L	k L	k_1 k_2 L	2.° k_m L
i i L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$Li(k_1 + k_2)	$\frac{2}{3}$Lik_m
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(k_1 + 2k_2)	$\frac{1}{3}$Lik_m
i L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$Li(2k_1 + k_2)	$\frac{1}{3}$Lik_m

$$EI_c\delta_{11} = \frac{1}{3}\times 8\times 1\times 1\times[3] + 4\times 1\times 1\times[6] + \frac{1}{3}\times 5\times(0.7)^2\times[3] + \ldots$$

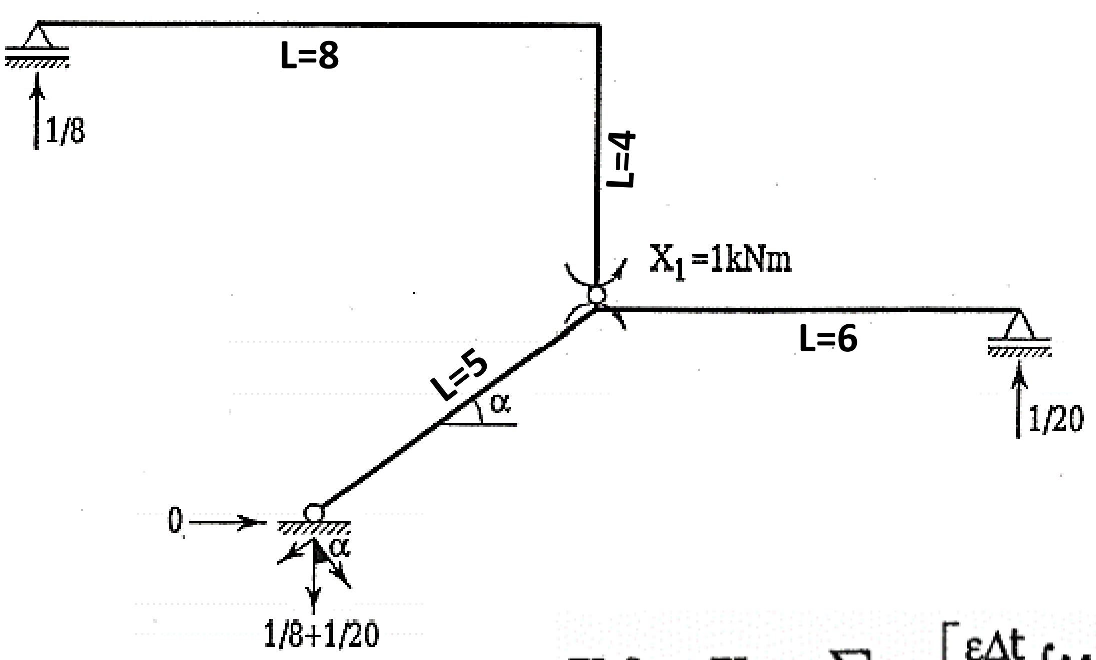
$$\ldots + \frac{1}{3}\times 6\times(0.3)^2\times[2] = 34.810$$

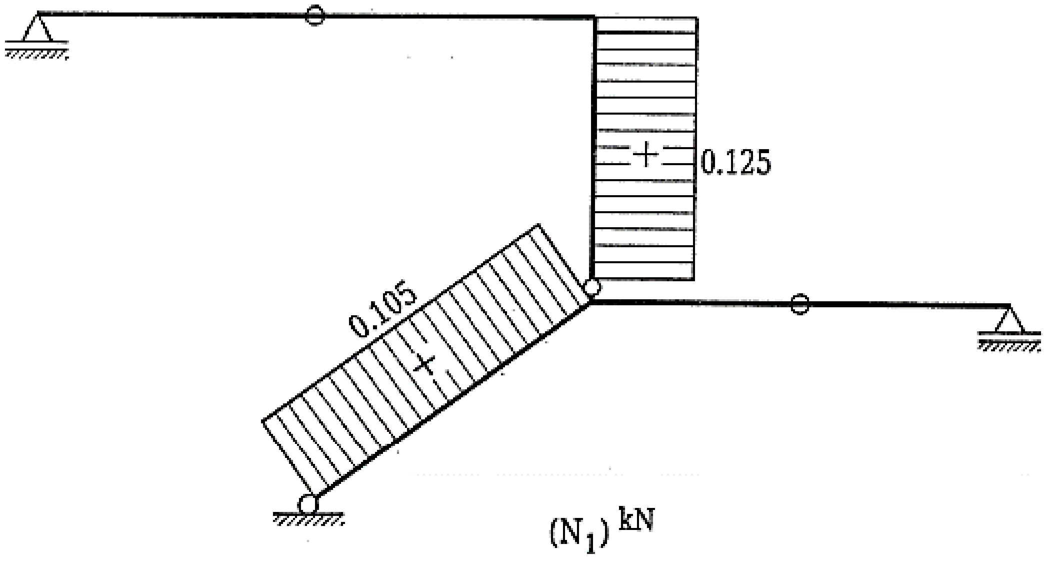


$(M_2)^{kNm}$

$$EI_c\delta_{22} = \frac{1}{6}\times 5\times(2\times 1 + 2\times 0.6 + 2\times(0.6)^2)\times[3] + \frac{1}{3}\times 6\times(0.6)^2\times[2] = 11.240$$

$$EI_c\delta_{12} = \frac{1}{6}\times 5\times(-0.7)\times(2\times 0.6 + 1)\times[3] + \frac{1}{3}\times 6\times 0.3\times 0.6\times[2] = -3.130$$



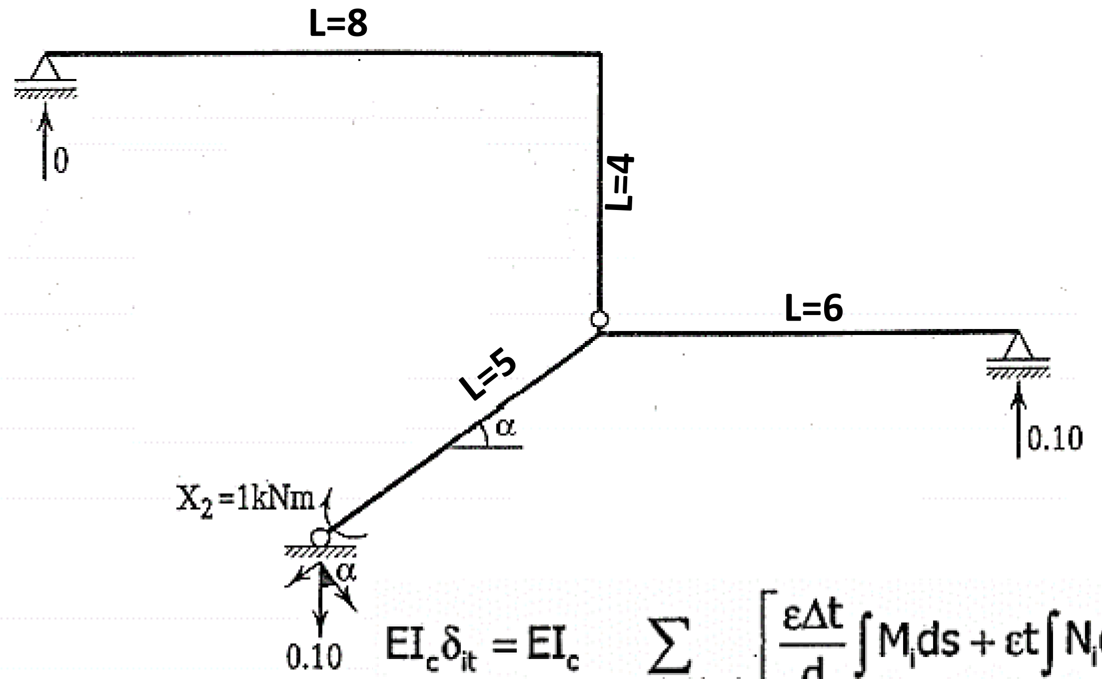


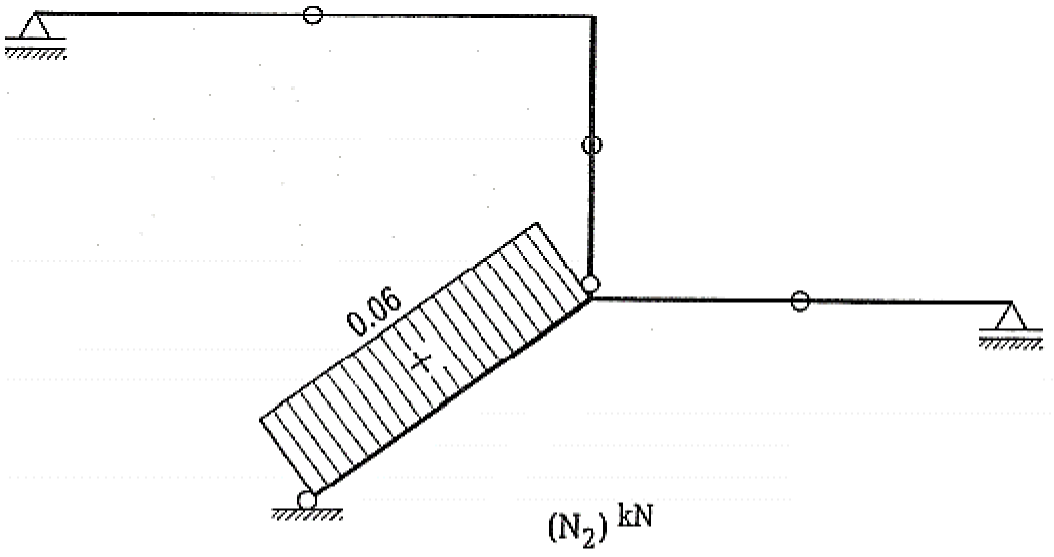
$$EI_c\delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\varepsilon\Delta t}{d} \int M_i ds + \varepsilon t \int N_i ds \right]$$

a) t=+20°C için, E=100000 kN/m² ε=10^{-5} I_c=6 I

$t_a = t_ü = t_s$ =20 °C

$$EI_c\delta_{1t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 20 \times (0.125 \times 4 + 0.105 \times 5) = 123.00$$





$$EI_c\delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\varepsilon\Delta t}{d} \int M_i ds + \varepsilon t \int N_i ds \right]$$

E=100000 kN/m^2 ε=10^{-5} I_c=6 I

$t_a = t_ü = t_s = 20\ ^oC$

a) t=+20°C için,

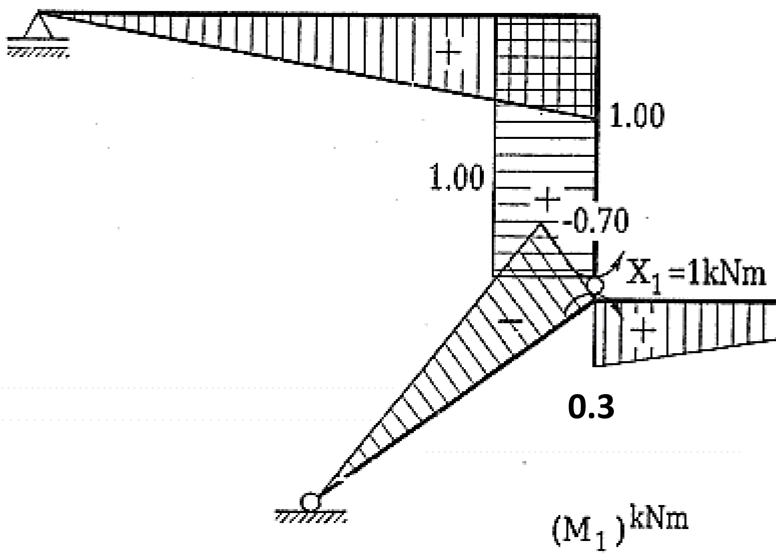
$$EI_c\delta_{2t} = 6\times100000\times10^{-5}\times20\times(0.06\times5) = 36.00$$

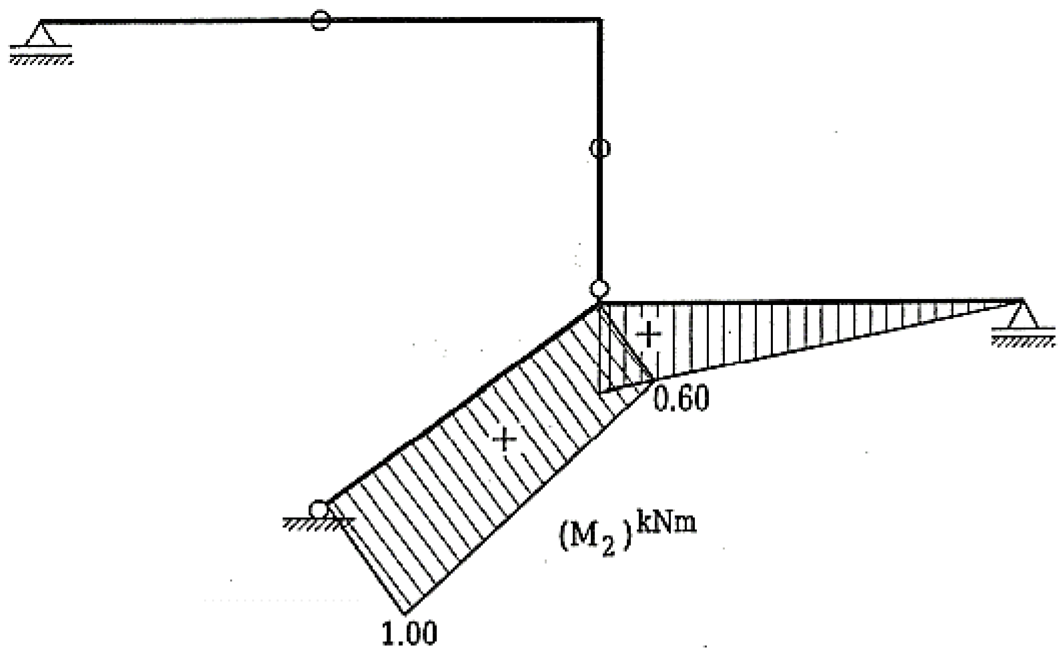
Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

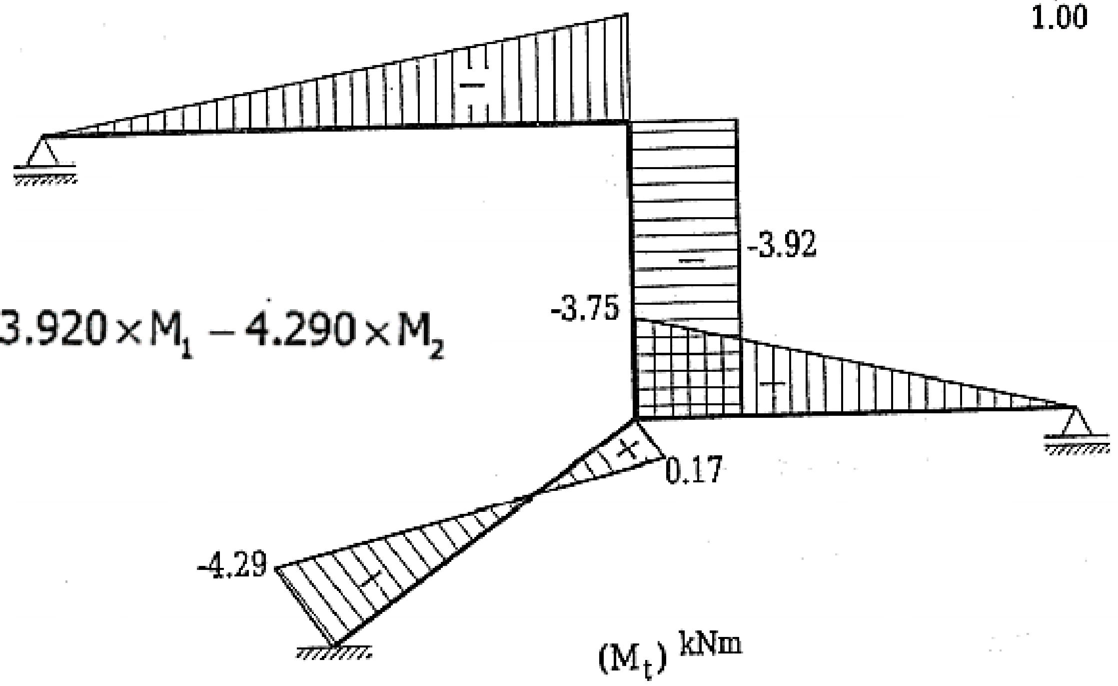
$$\begin{bmatrix} 34.810 & -3.130 \\ -3.130 & 11.240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -123.00 \\ -36.00 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = -3.920\ ,\ X_2 = -4.290$$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

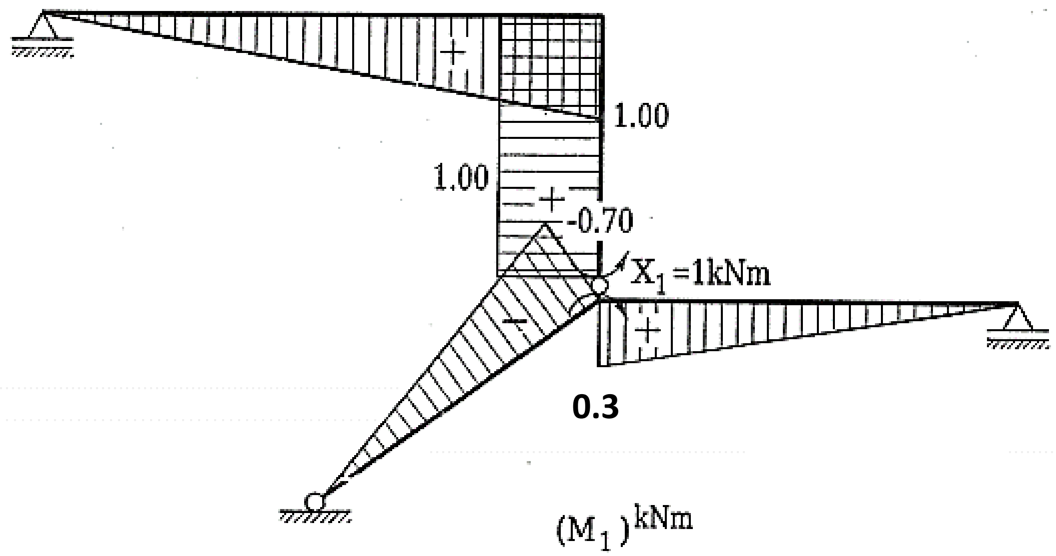
$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \quad \Rightarrow \quad M = -3.920 \times M_1 - 4.290 \times M_2$$

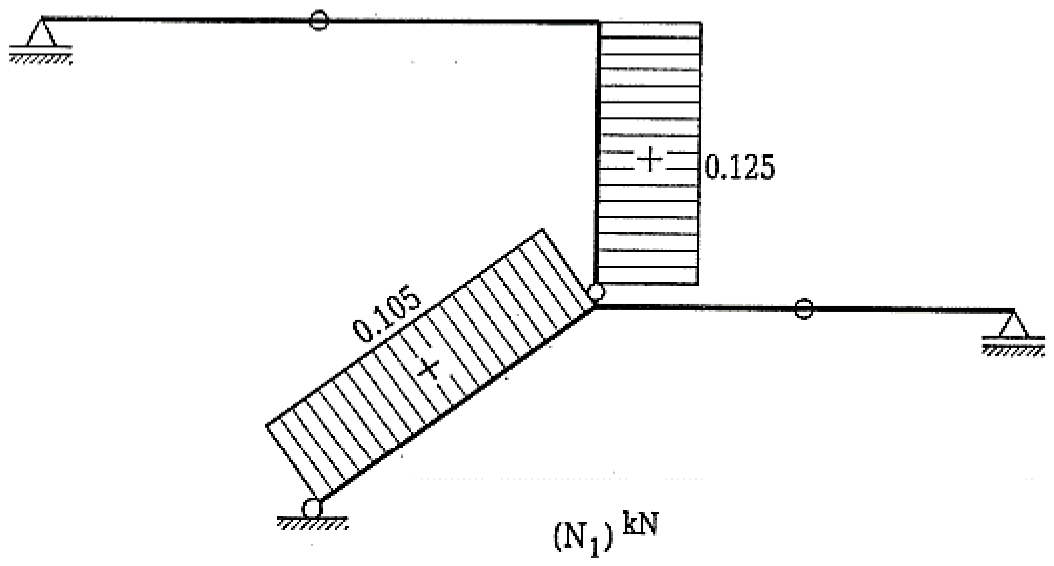






$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \quad \Rightarrow \quad M = -3.920 \times M_1 - 4.290 \times M_2$$



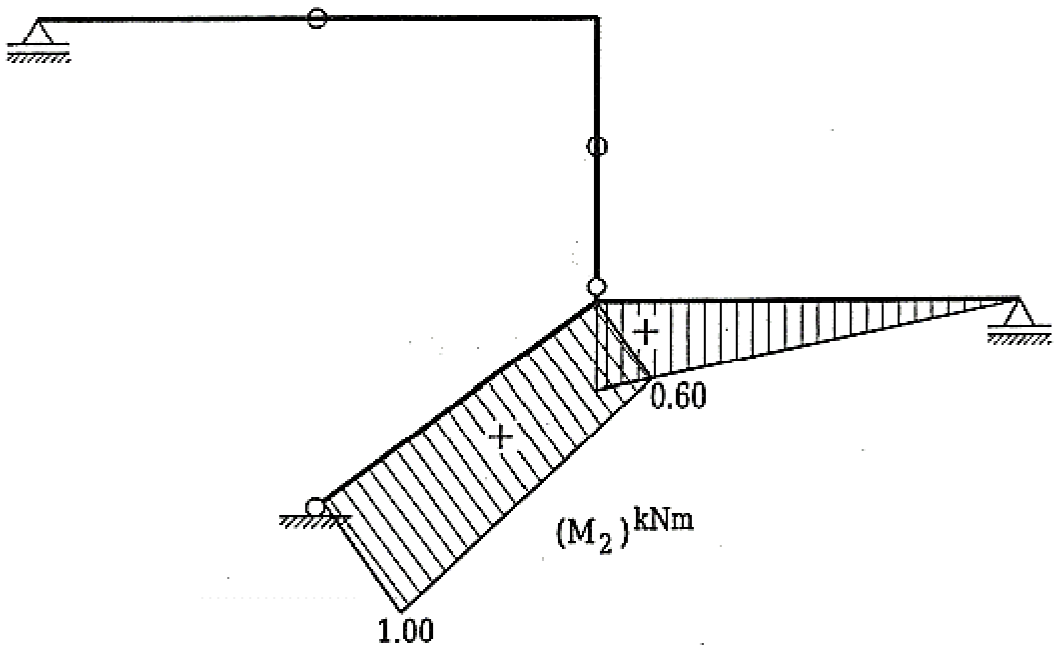


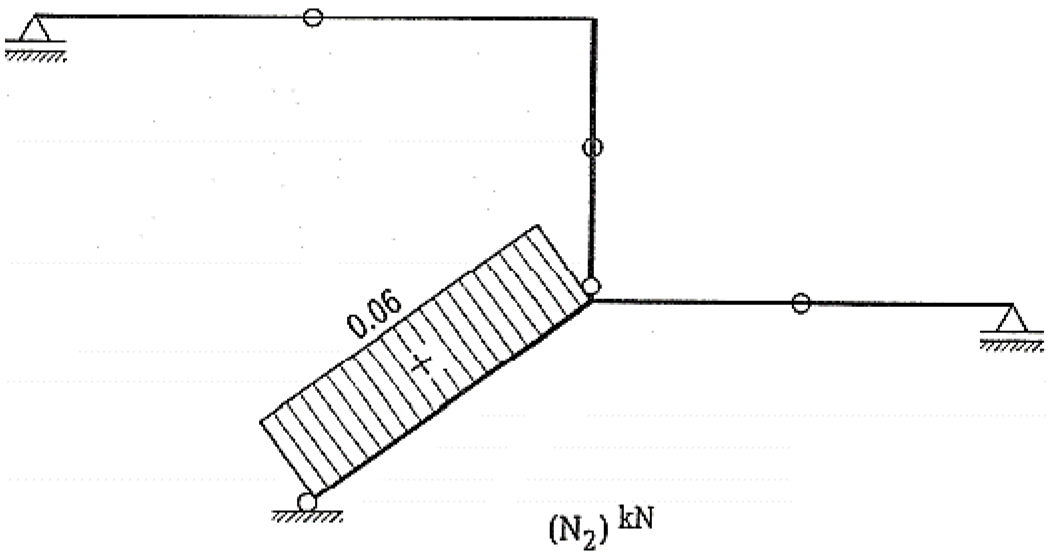
E=100000 kN/m² ε=10⁻⁵ I_c=6 I

$$EI_c\delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\varepsilon\Delta t}{d} \int M_i ds + \varepsilon t \int N_i ds \right]$$

b) $\Delta t = +15°C$ için,

$$EI_c\delta_{1\Delta t} = 6\times100000\times10^{-5}\times15\times\left(\frac{1\times8}{2\times0.7}+\frac{1\times4}{0.6}+\frac{0.3\times6}{2\times0.8}+\frac{5\times(-0.70)}{2\times0.80}\right)=1018.661$$





E=100000 kN/m² $\varepsilon=10^{-5}$ I_c=6 I

$$EI_c\delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\varepsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \varepsilon t \int N_i ds \right]$$

b) $\Delta t = +15°C$ için,

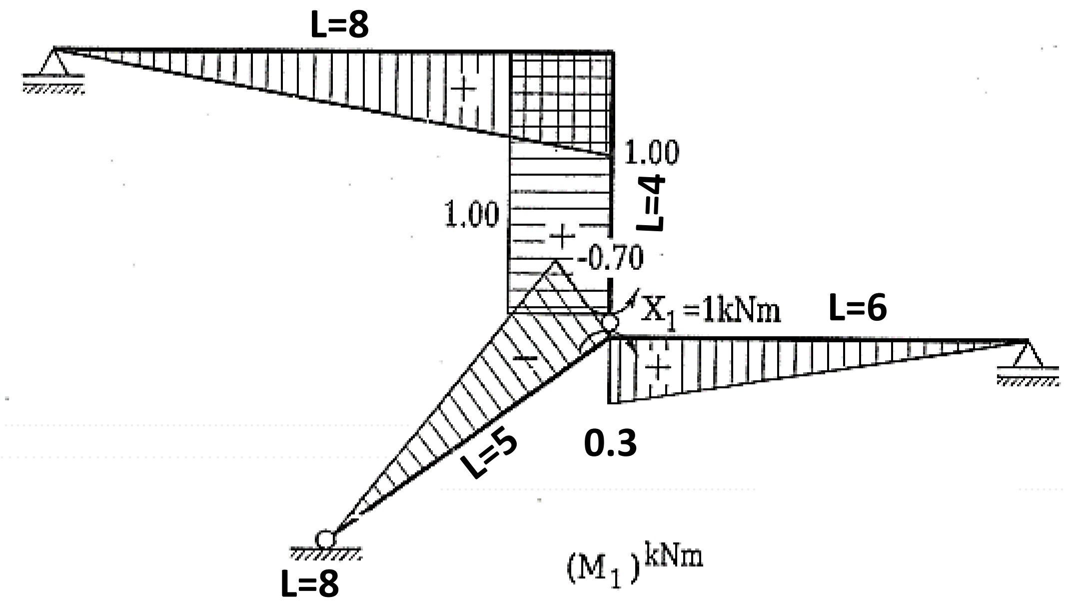
$$EI_c\delta_{2\Delta t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 15 \times \left(\frac{(1+0.6)\times 5}{2\times 0.8} + \frac{0.6\times 6}{2\times 0.8} \right) = 652.500$$

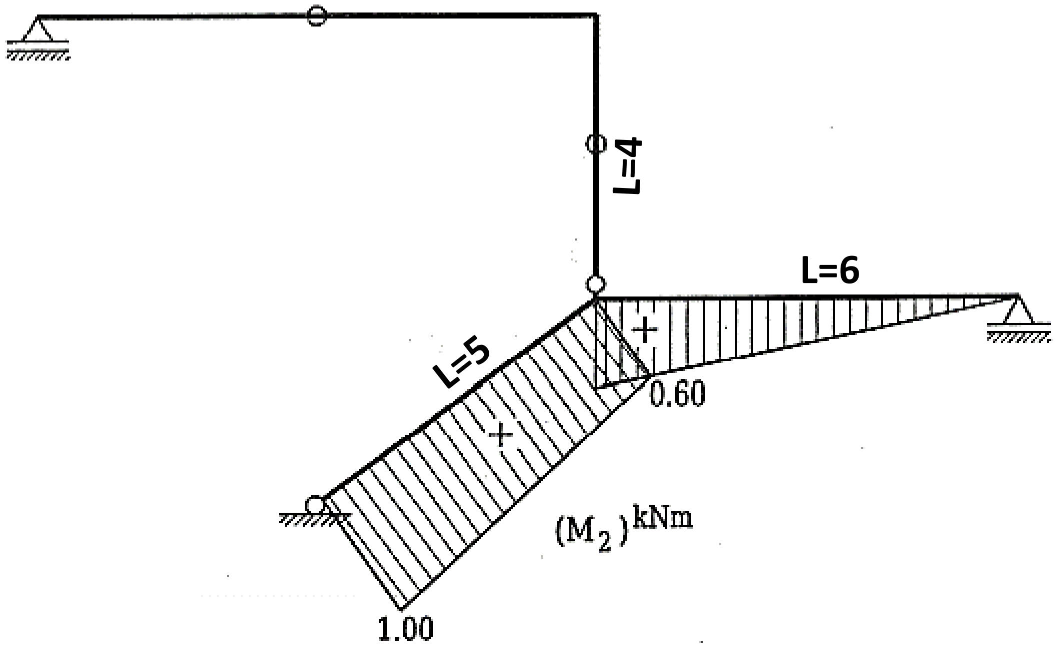
Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

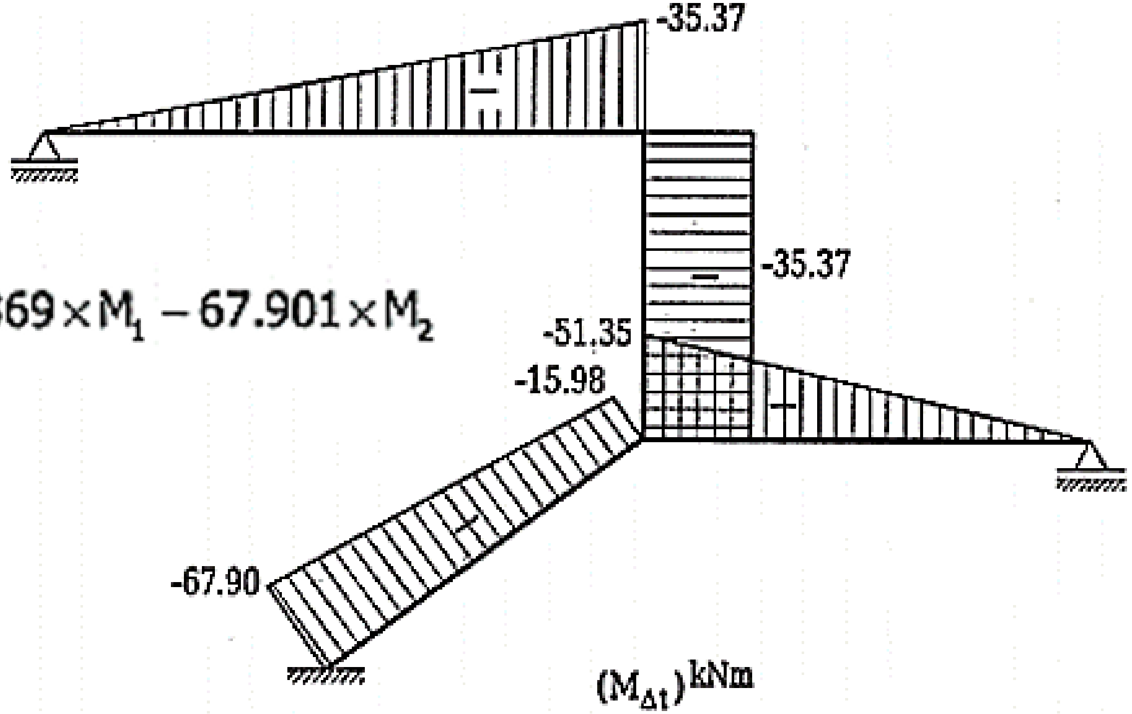
$$\begin{bmatrix} 34.810 & -3.130 \\ -3.130 & 11.240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1018.661 \\ -652.500 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = -35.369 \text{ , } X_2 = -67.901$$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \Rightarrow M = -35.369 \times M_1 - 67.901 \times M_2$$



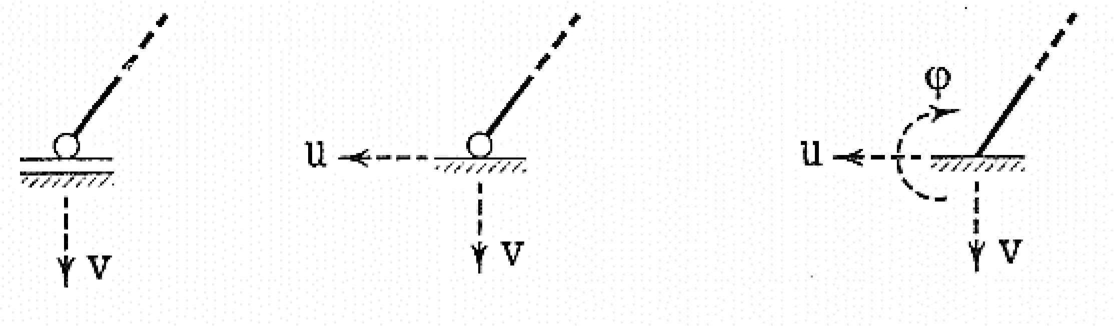




$$M = M_1X_1 + M_2X_2 \quad \Rightarrow \quad M = -35.369 \times M_1 - 67.901 \times M_2$$

MESNET ÇÖKMELERİNİN ETKİSİ ALTINDA BULUNAN HİPERSTATİK SİSTEMLERİN HESABI

- Mesnetlerin tanımına uymayan yer değiştirmelere mesnet çökmesi denilmektedir.



u , v : doğrusal mesnet çökmesi (m)

φ : açısal mesnet çökmesi (mesnet dönmesi) (radyan)

Hiperstatik sisteme dış etki olarak yalnız mesnet çökmelerinin etkimesi halinde süperpozisyon denklemleri

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + \ldots\ldots + M_nX_n = \sum_{i=1}^{n} M_iX_i$$

$$N = N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 + \ldots\ldots + N_nX_n = \sum_{i=1}^{n} N_iX_i$$

$$T = T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 + \ldots\ldots + T_nX_n = \sum_{i=1}^{n} T_iX_i$$

Dış yük=0
M_0, N_0, T_0 =0

şeklindedir.

Açık Süreklilik Denklemleri ise,

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{1n}X_n = J_1$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{2n}X_n = J_2$$
$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{3n}X_n = J_3$$

....

....

....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \ldots\ldots + \delta_{nn}X_n = J_n$$

olarak elde edilir.

Görüldüğü gibi burada dış yüklerden ya da sıcaklık değişiminden gelen terimler yerine mesnet çökmelerinin etkisini gösteren J sabitleri mevcuttur. Birim yüklemeler sonucu oluşan mesnet tepkileri ancak sistemde mesnet çökmeleri varsa iş yapmaktadır. Yani burada dış kuvvetlerin yaptığı iş sıfırdan farklı olmaktadır.

Sonuç:

J_i : $X_i = 1$ yüklemesindeki mesnet tepkilerinin mesnet çökmelerinde yaptığı iş.

(Mesnet tepkileri $\times$ kendi doğrultularındaki mesnet çökmeleri)

HESAPTA İZLENEN YOL

1- İzostatik esas sistem seçilir ve hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.

2- $X_i = 1$ birim yüklemeleri yapılarak gerekli kesit zorları diyagramları çizilir.

3- δ_{ik} ve J_i terimleri hesaplanır. Hesapta $EI_c\delta_{ik}$ terimleri kullanılıyorsa mesnet çökmesi terimleride EI_cJ_i olmalıdır.

Not: Mesnet çökmelerine göre hesapta sonucun sayısal olarak elde edilebilmesi için EI_c nin sayısal değerinin bilinmesi gereklidir.

4- Denklem takımı çözülerek X_i bilinmeyenleri bulunur.

5- M , N , T kesit zorları diyagramları çizilir. Bunun için iki yoldan yararlanılabilir.

a) Süperpozisyon denklemleri ile $(M = M_1X_1 + M_2X_2 + ... + M_nX_n)$

b) İzostatik esas sisteme hiperstatik bilinmeyenler yüklenir ve diyagramlar çizilir.

6- KSD ile kontrol edilir.

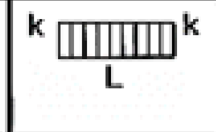
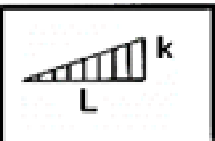
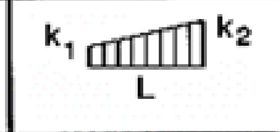
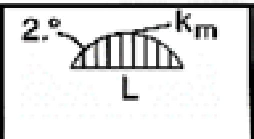
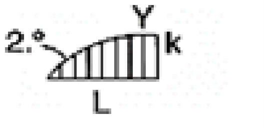
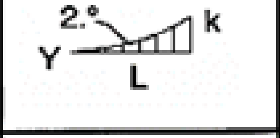
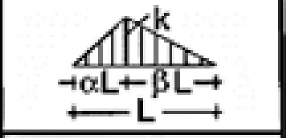
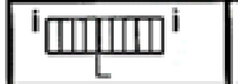
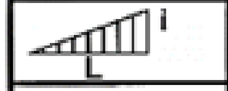
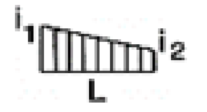
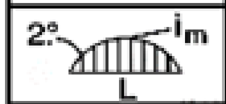
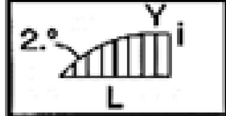
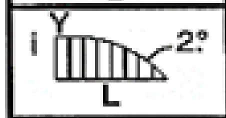
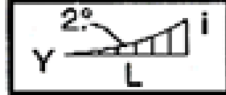
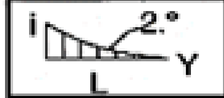
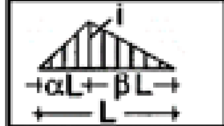
$$\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds = J_i \quad (i=1, 2, 3, ..., n)$$

veya uzama ve kayma şekildeğiştirmeleri terkedilirse Kapalı Süreklilik Denklemi,

$$\int M_i M \frac{I_c}{I} ds = EI_c J_i$$

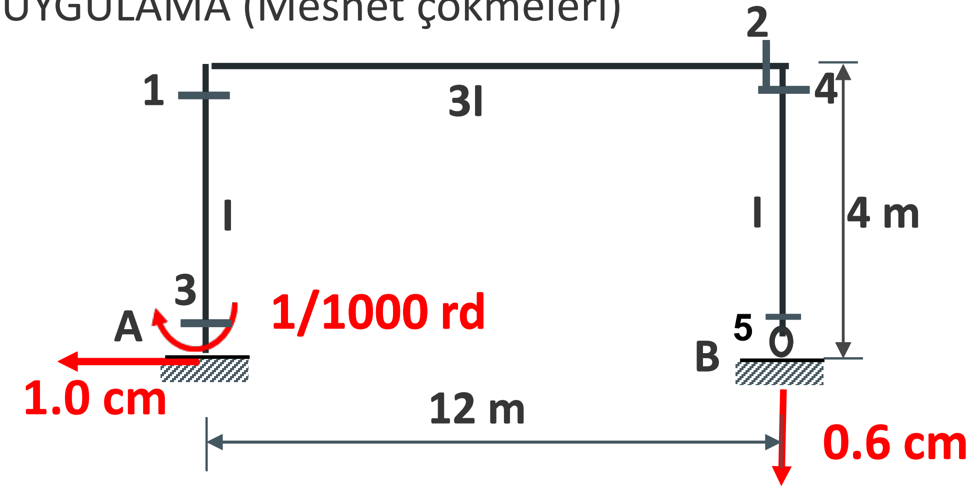
olarak elde edilir.

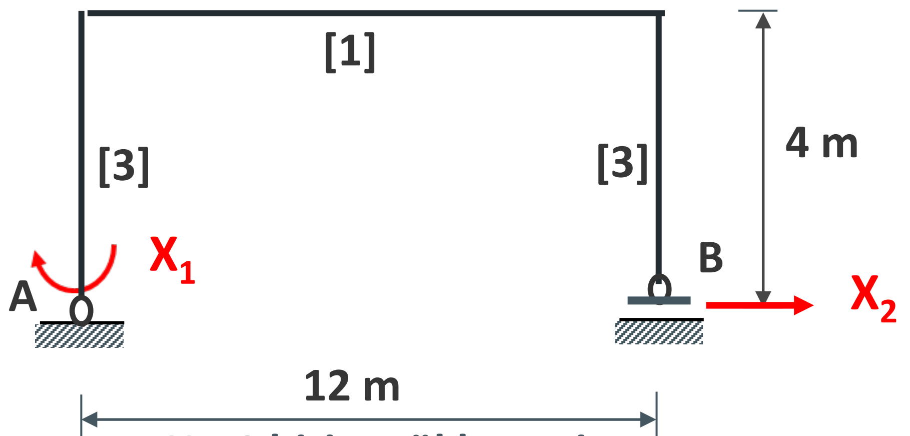
ÇARPIM TABLOSU $\left(\int_0^L M_i M_k \, ds\right)$

							
	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1+\beta)i_1+(1+\alpha)i_2]$
	$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk$	$\frac{1}{5}Li_mk$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$
	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$
	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)ik$
	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}L[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

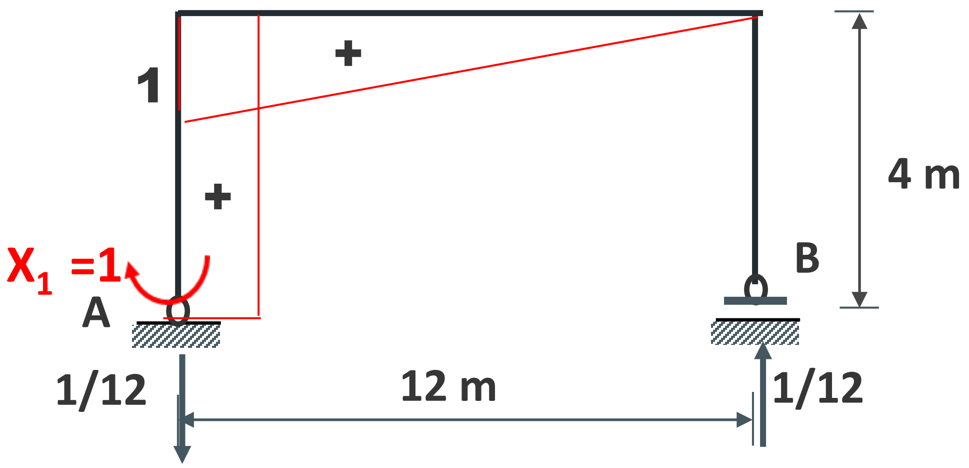
Y yazılı uçlarda 2.° parabolünün teğeti yataydır.

UYGULAMA (Mesnet çökmeleri)

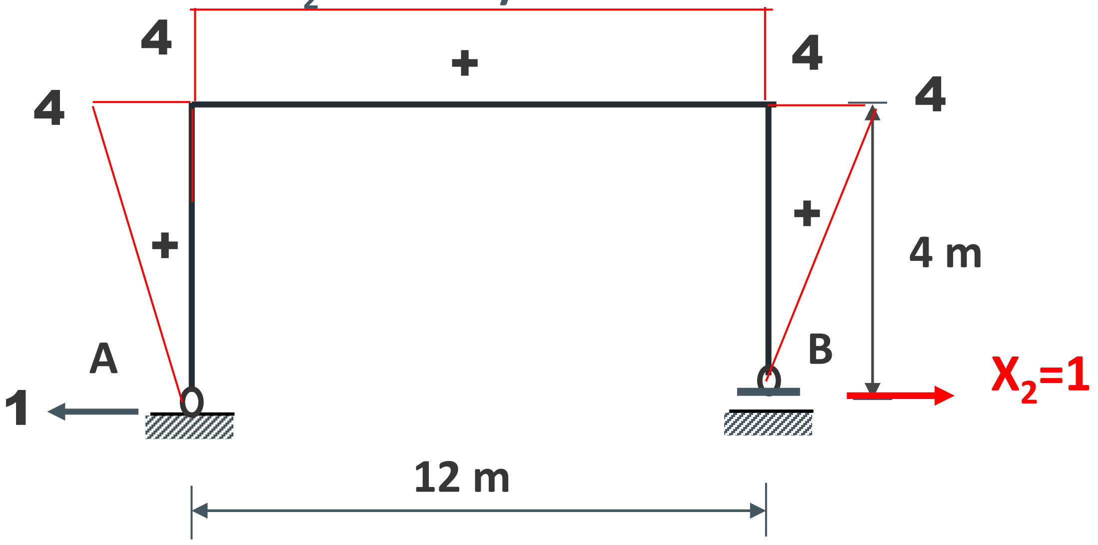




X_1=1 birim yüklemesi



X_2=1 birim yüklemesi



M_2

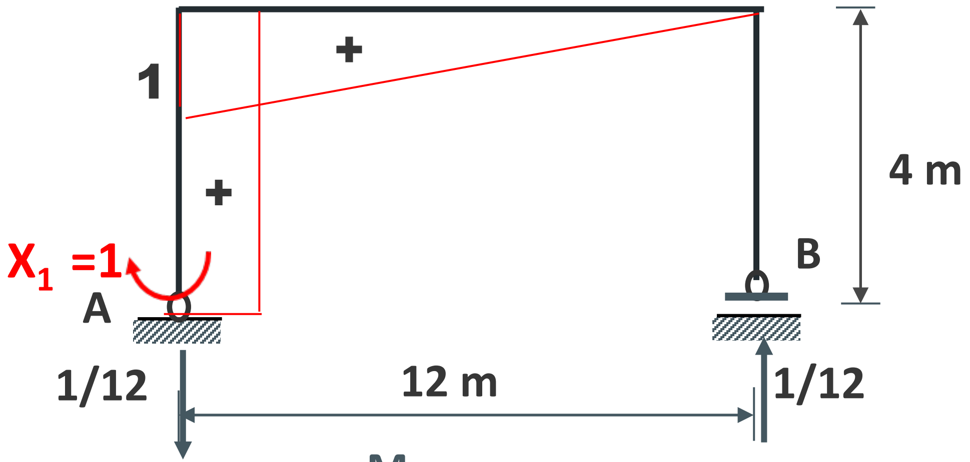
$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \qquad EI_c\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds$$

	k ▭ k, L	◿ k, L	k_1 ▭ k_2, L	2° ⌒ k_m, L
i ▭ i, L	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$
◿ i, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$
i ◺, L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$

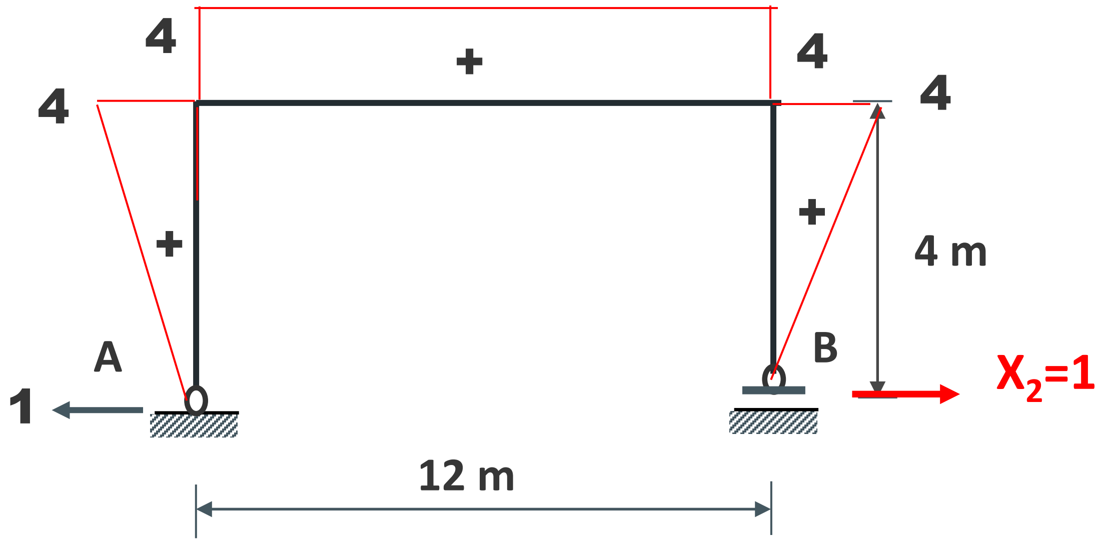
$$EI_c\delta_{11} = 4 * 1 * 1 * [3] + \frac{1}{3} * 12 * 1 * 1 * [1] = 12 + 4 = 16$$

$$EI_c\delta_{12} = EI_c\delta_{21} = \frac{1}{2} * 4 * 4 * 1 * [3] + \frac{1}{2} * 12 * 1 * 4 * [1] = 24 + 24 = 48$$

$$EI_c\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 * [3]\right) + 12 * 4 * 4 * [1] = 320$$



M_1



M_2

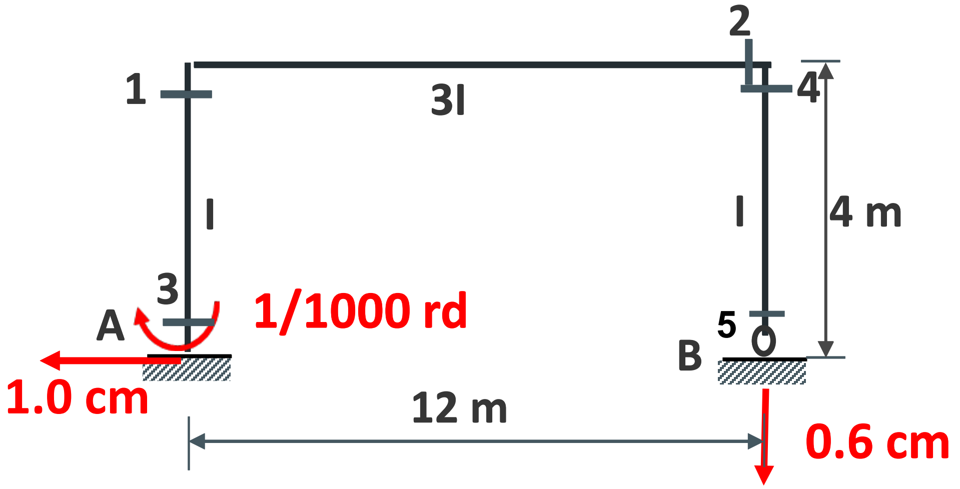
$$EI_c = 2.1 * 10^6 * 3 * 80 * 10^{-4} = 48 * 10^3$$

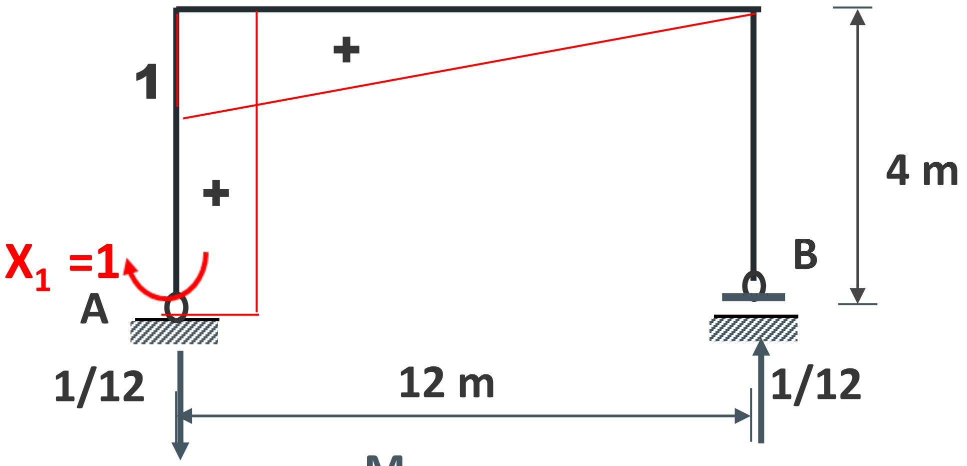
$$J_1 = 1 * \frac{1}{1000} - \frac{1}{12} * (0.006) = 0.5 * 10^{-3}$$

$$J_2 = 1 * 1 * 10^{-2} = 10^{-2}$$

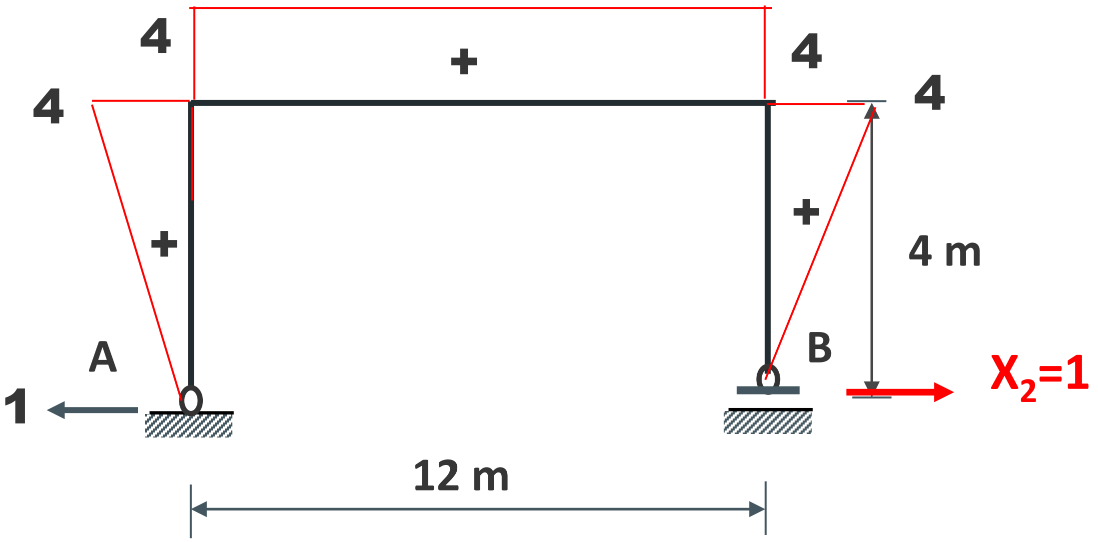
$$EI_c J_1 = 48 * 10^3 * 0.5 * 10^{-3} = 24$$

$$EI_c J_2 = 48 * 10^3 * 10^{-3} = 480$$





M_1



M_2

$$EI_c \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = EI_c \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{Bmatrix}$$

$$EI_c\delta_{11}X_1 + EI_c\delta_{12}X_2 = EI_cJ_1$$

$$EI_c\delta_{21}X_2 + EI_c\delta_{22}X_2 = EI_cJ_2$$

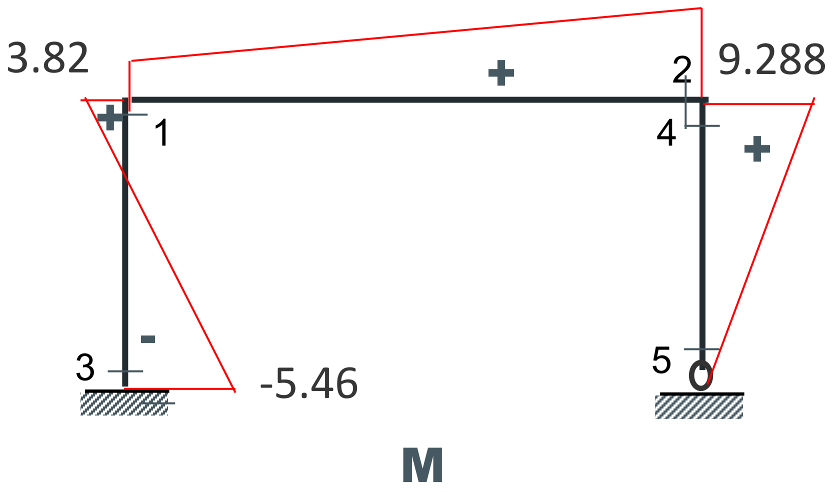
$$16X_1 + 48X_2 = 24$$

$$48X_1 + 320X_2 = 480$$

$$X_1 = -5.46\ tm \qquad X_2 = -2.32\ t$$

$$M = M_1X_1 + M_2X_2$$

$$M_0 = 0 \text{ dış yük} = 0$$



$$M_{(1)} = 1 * (-5.46) + 4 * (2.32) = 3.82\ tm$$

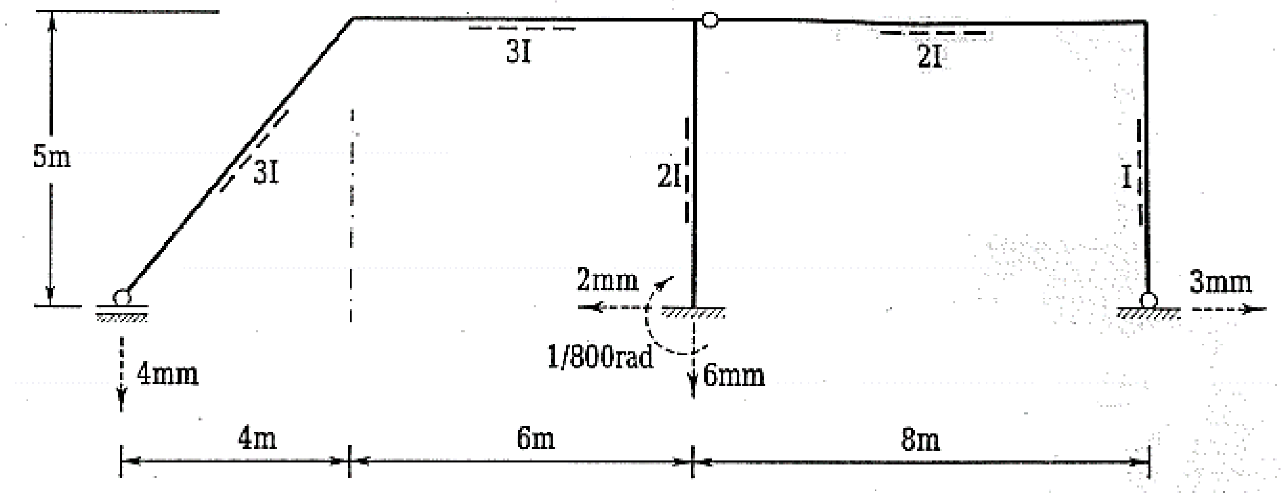
$$M_{(2)} = 0 * (-5.46) + 4 * (2.32) = 9.28\ tm$$

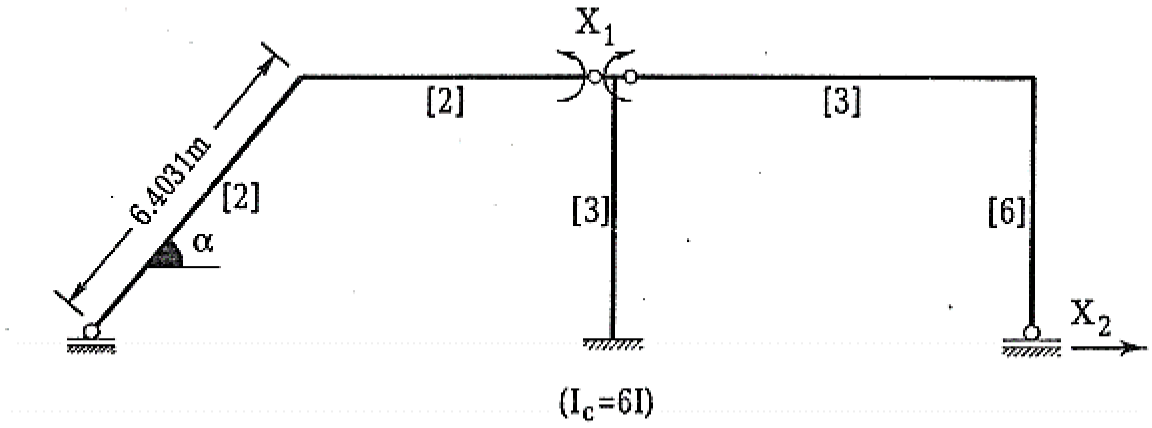
$$M_{(2)} = M_{(4)} = 9.28\ tm$$

$$M_{(3)} = 1 * (-5.46) + 0 * (2.32) = -5.46\ tm$$

$$M_{(5)} = 0.0\ tm$$

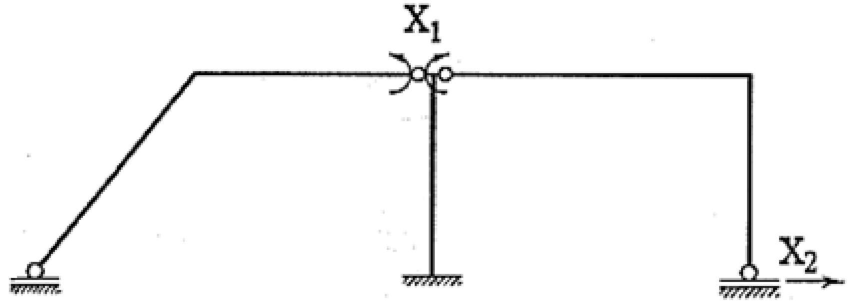
ÖRNEK 8





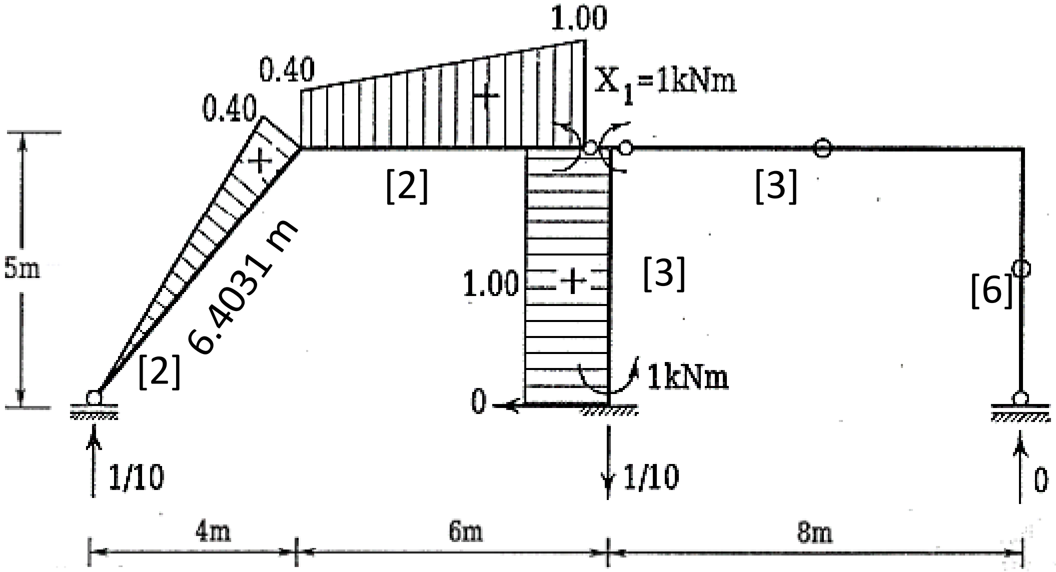
$$\sin\alpha = \frac{5}{6.4031} = 0.7809 \quad , \quad \cos\alpha = \frac{4}{6.4031} = 0.6247$$

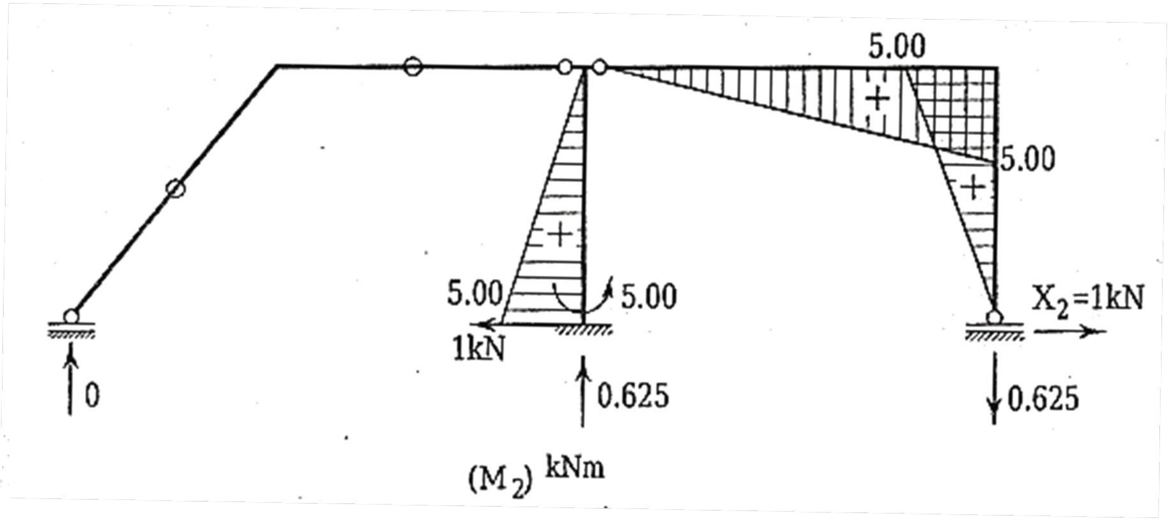
Şekildeki hiperstatik sistemde verilen mesnet çökmelerinden oluşan M ve T diyagramlarını çiziniz. (EI=80000 kNm^2)



n=3x0+6-1-3=2 2. derece hiperstatik

[2]





$$EI_c\delta_{11} = \frac{1}{3}\times 6.4031\times(0.4)^2\times[2]+\frac{1}{6}\times 6\times\left(2\times(0.4)^2+2\times(0.4)+2\times 1^2\right)\times[2]+\ldots$$

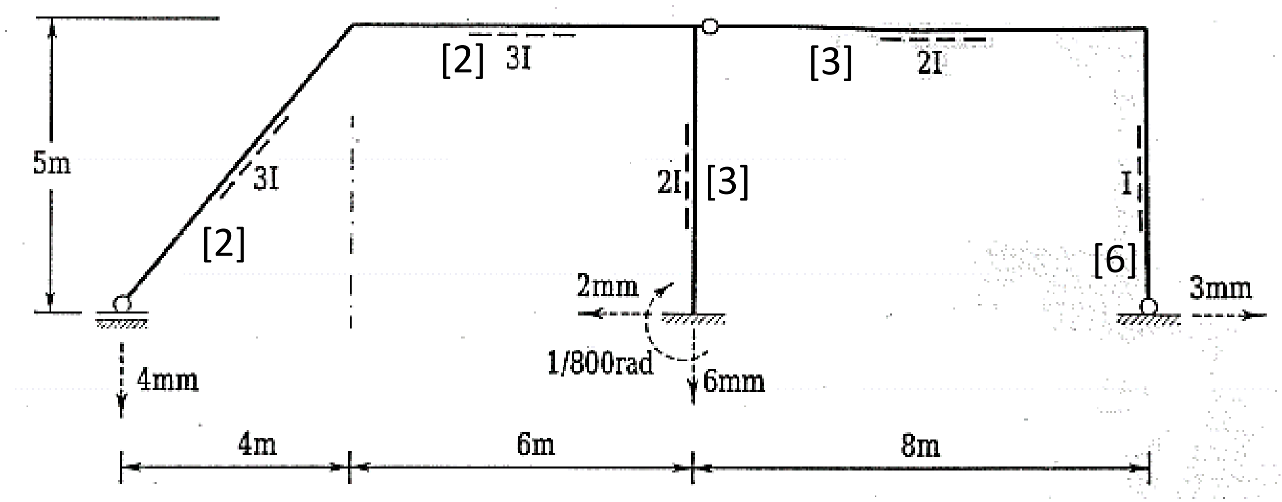
$$\ldots+5\times 1\times 1\times[3]=21.923$$

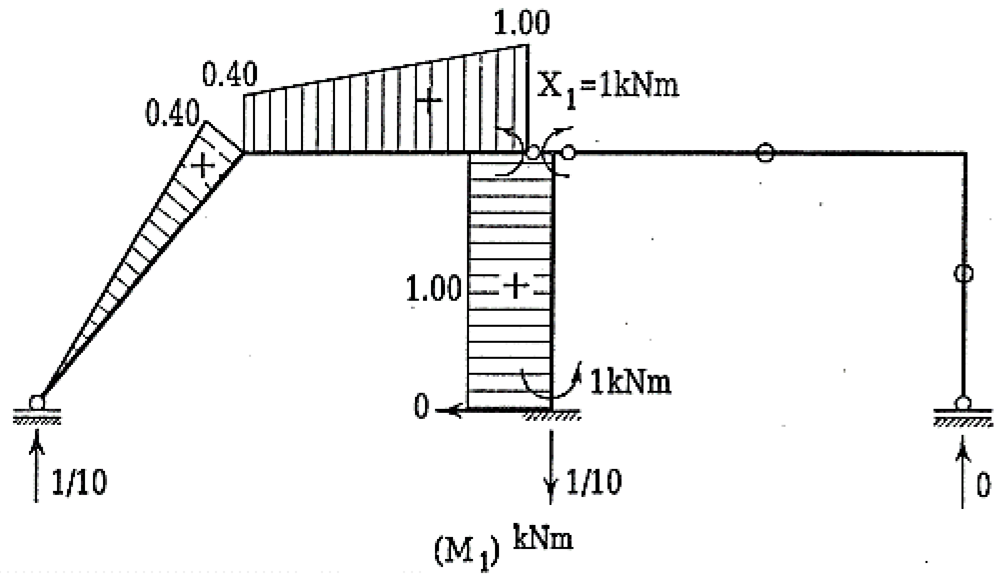
$$EI_c\delta_{22} = \frac{1}{3}\times 5\times 5^2\times[3]+\frac{1}{3}\times 8\times 5^2\times[3]+\frac{1}{3}\times 5\times 5^2\times[6]=575$$

$$EI_c\delta_{12} = \frac{1}{2}\times 5\times 1\times 5\times[3]=37.5$$

ÇARPIM TABLOSU

	k ▯ k, L	k, L	k_1 k_2, L	2.° k_m, L
i ▯ i, L	Lik	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{2}$L$i(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}$Lik_m
i, L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{3}$Lik	$\frac{1}{6}$L$i(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik_m
i, L	$\frac{1}{2}$Lik	$\frac{1}{6}$Lik	$\frac{1}{6}$L$i(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}$Lik_m
i_1 i_2, L	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$

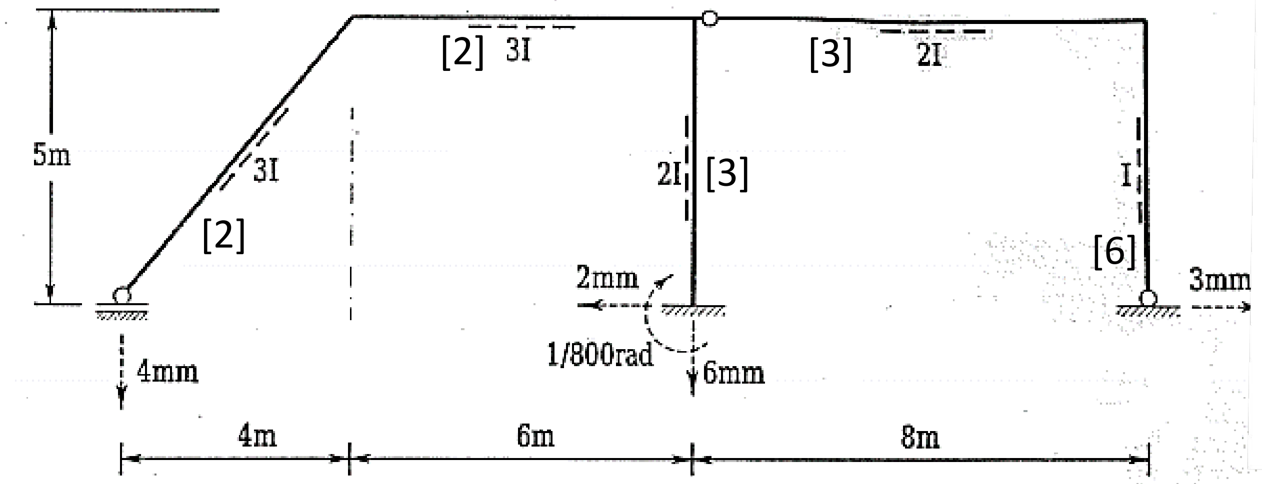


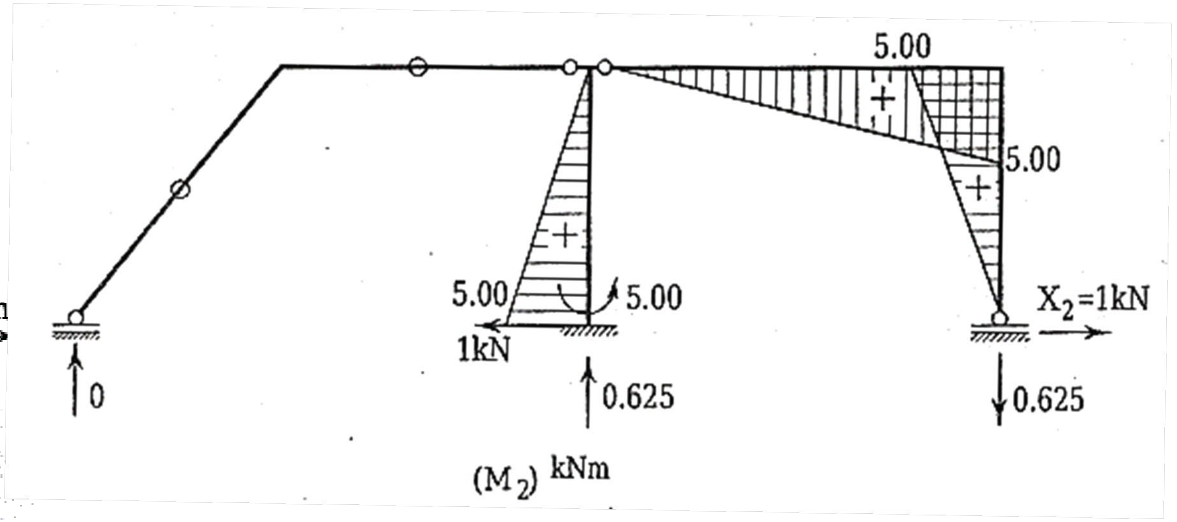


I_c=6 I

-0.004 m

$$EI_cJ_1 = 6\times 80000\times\left((-0.4)\times 10^{-2}\times 0.10 + 0.6\times 10^{-2}\times 0.10 - 1\times\frac{1}{800}\right) = -504$$





$$EI_cJ_2 = 6\times 80000\times\left((-5)\times\frac{1}{800} - 0.6\times 10^{-2}\times 0.625 + 0.2\times 10^{-2}\times 1 + 0.3\times 10^{-2}\times 1\right)$$

$$\Rightarrow EI_cJ_2 = -2400$$

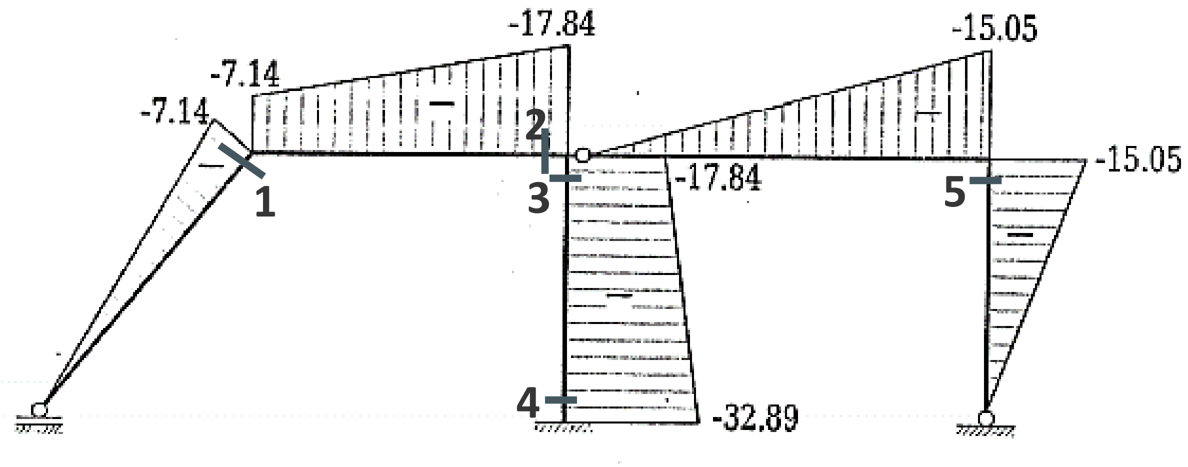
Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

$$\begin{bmatrix} 21.923 & 37.5 \\ 37.5 & 575 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -504 \\ -2400 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = -17.84,\ X_2 = -3.01$$

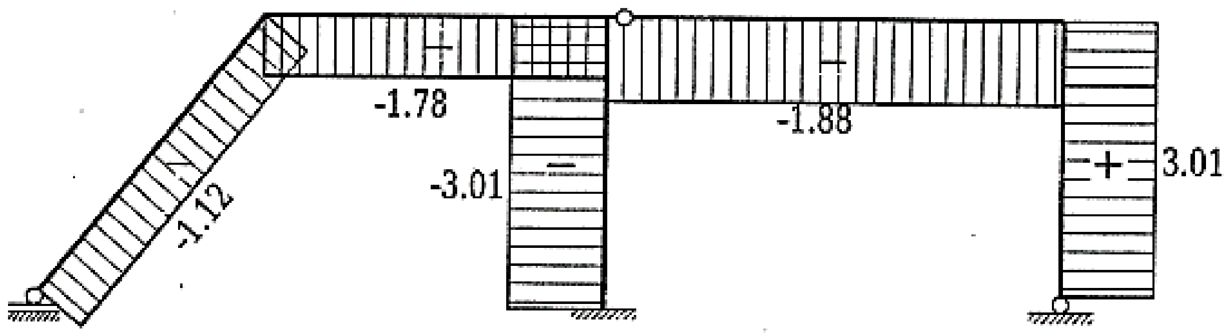
Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 \Rightarrow M = -17.84 \times M_1 - 3.01 \times M_2$$

$$\mathbf{T = T_1X_1 + T_2X_2 \rightarrow T = T_1(-17.84) + T_2(-3.01)}$$



(M) kNm



(T) kN

$$M = M_1(-17.84) + M_2(-3.01)$$

$$M_{(1)} = 0.4 * (-17.84) + 0 * (-3.01) = -7.14\ kNm$$

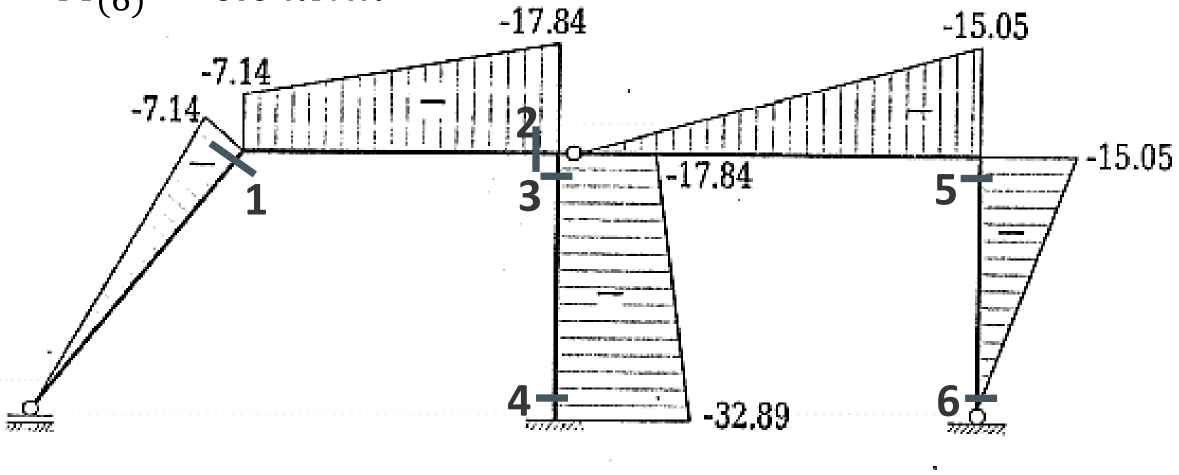
$$M_{(2)} 1 * (-17.84) + 0 * (-3.01) = -17.84\ kNm$$

$$M_{(3)} = M_{(2)} = -17.84\ kNm$$

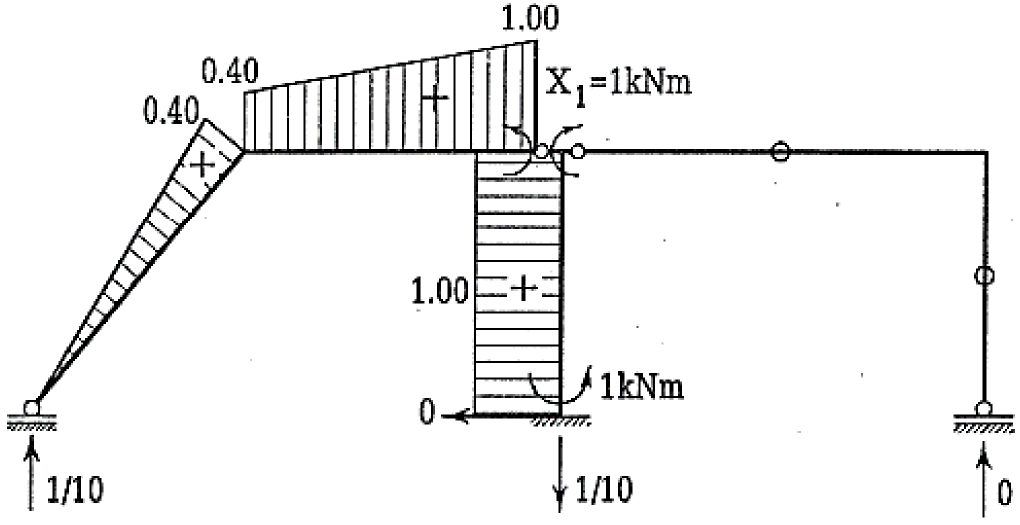
$$M_{(4)} = 1 * (-17.84) + 5 * (-3.01) = -32.89\ kNm$$

$$M_{(5)} = 0 * (-17.84) + 5 * (-3.01) = -15.05\ kNm$$

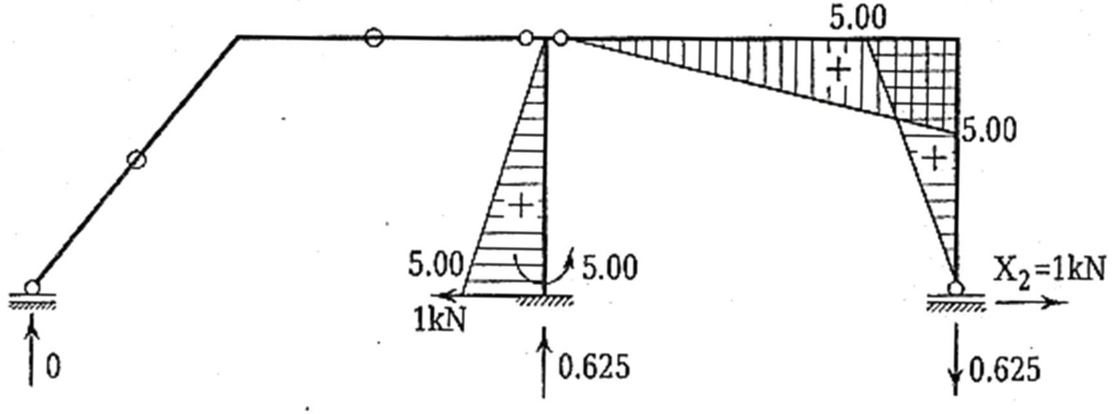
$$M_{(6)} = 0.0\ kNm$$



(M) kNm



(M_1) kNm



(M_2) kNm