

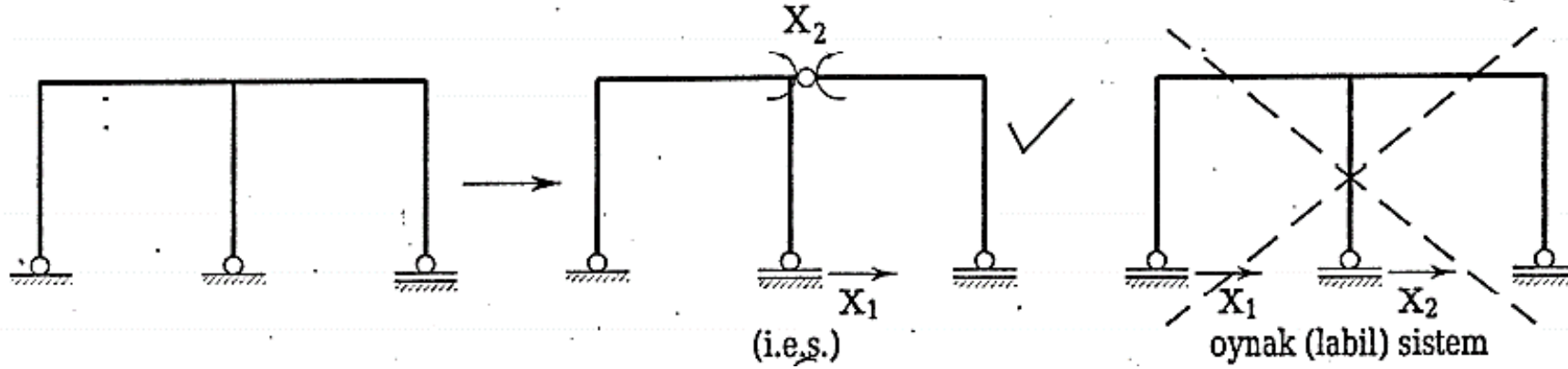
YAPI STATİĞİ 2

DERS NOTLARI(2-2)

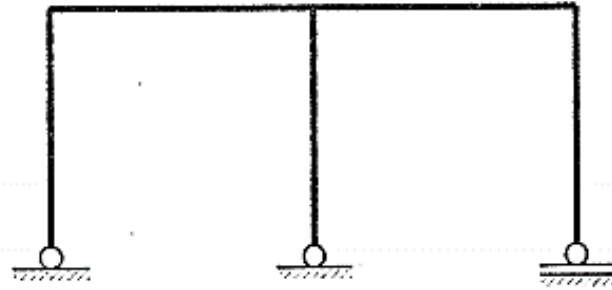
Prof. Dr. Cengiz Dünder

İZOSTATİK ESAS SİSTEMİN SEÇİLMESİ

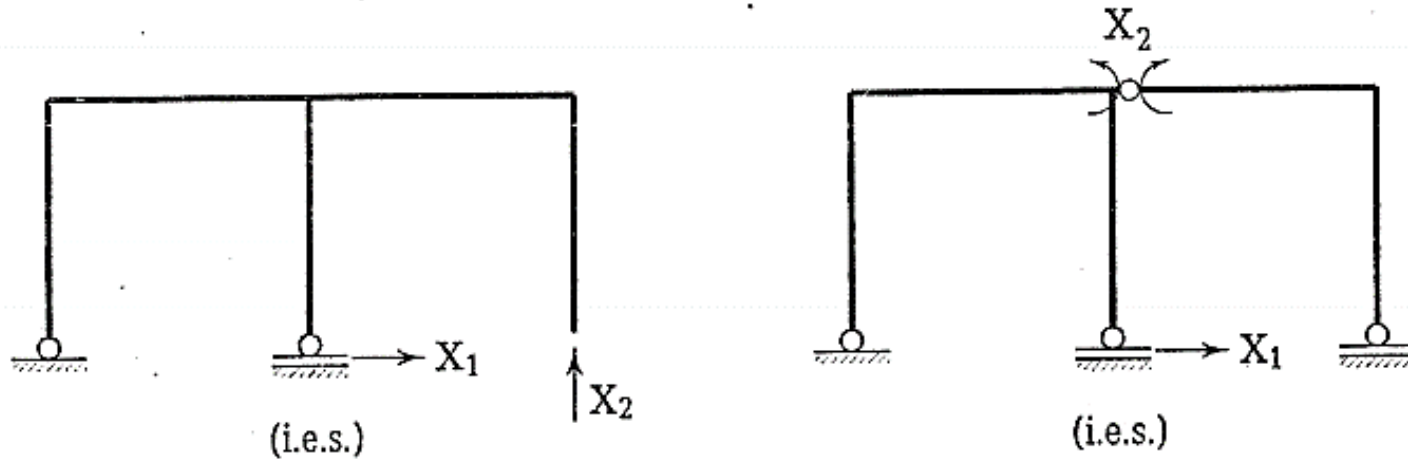
1- Seçilen izostatik sistem taşıyıcı olmalı, oynak (labil) olmamalıdır. Oynak sistem seçilmesi halinde bütün hesaplar anlamsız ve yanlış olacaktır.



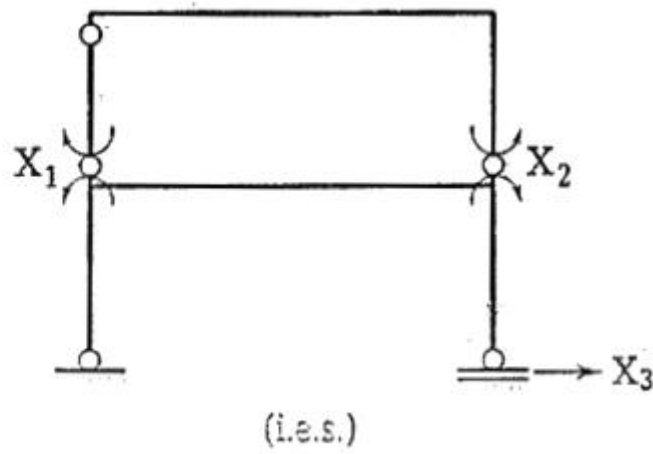
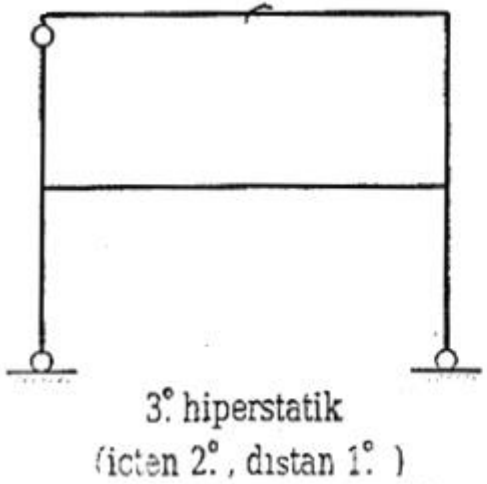
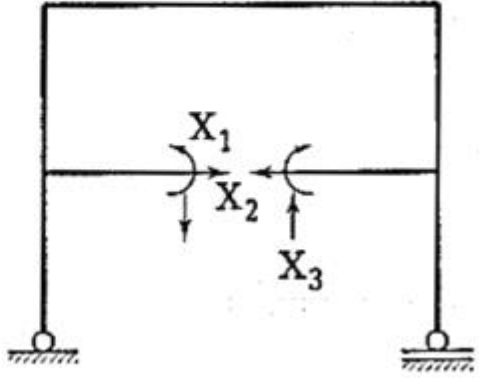
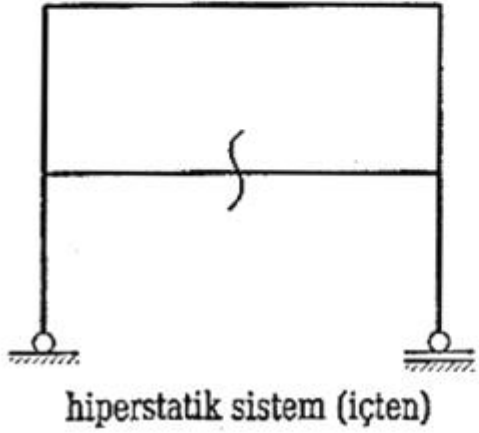
2- Dıştan hiperstatik sistemlerde mesnet tepkileri ve/veya kesit zorları kaldırılarak izostatik esas sistem elde edilebilir.



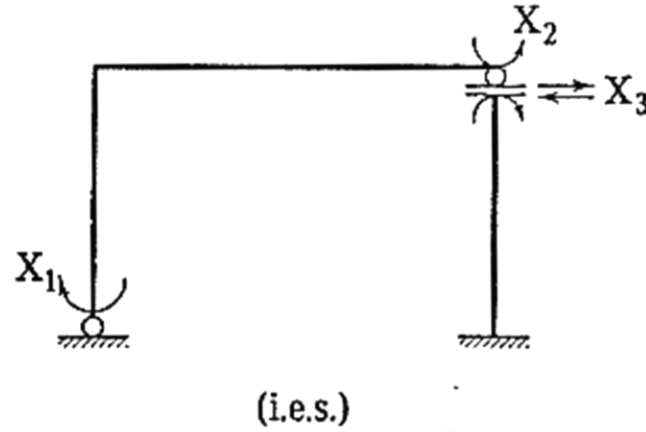
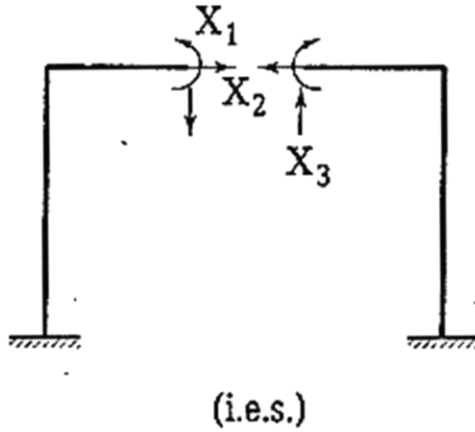
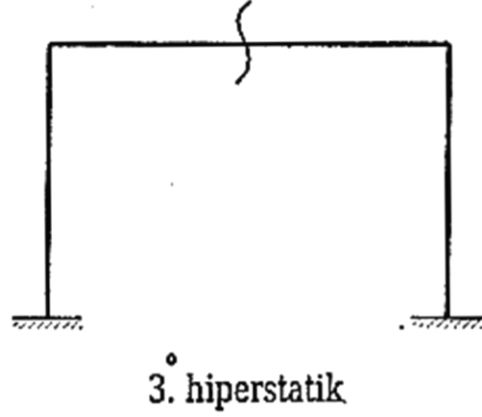
hiperstatik sistem



3- İçten hiperstatik sistemlerde mutlaka kesit zorları kaldırılarak izostatik esas sistem elde edilebilir. İçten ve dıştan hiperstatik sistemlerde ise en az içten hiperstatiklik derecesi kadar kesit zoru kaldırılmalıdır.

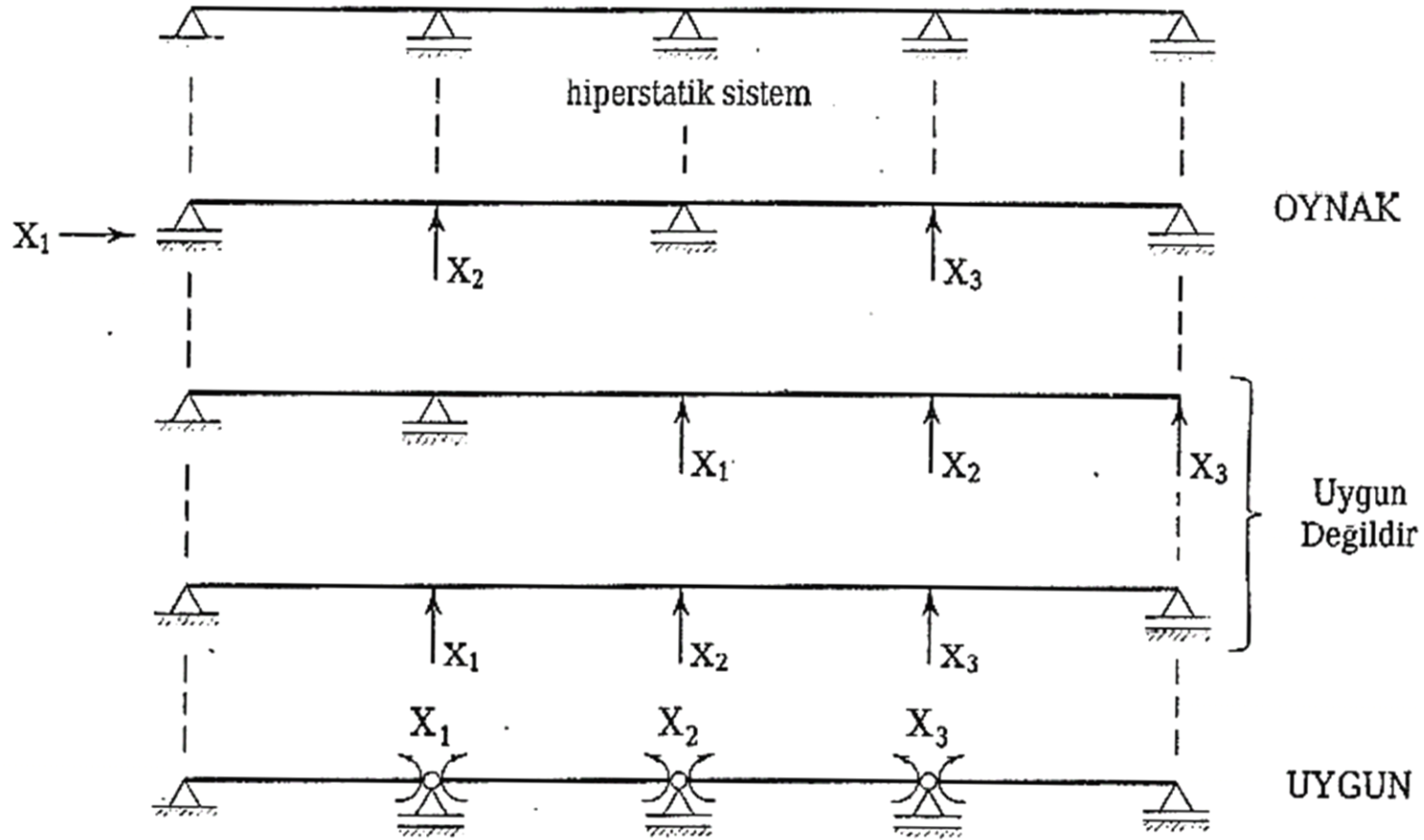


4- Kesit zorlarının hiperstatik bilinmeyen olarak seçilmesi halinde birim yükleme bir çift kuvvet veya momenttir.



İzostatik esas sistem basit kiriş, basit çerçeve veya bunların birleşmesinden oluşan ve taşıma şeması kolayca çizilebilen bir sistem olmalıdır.

★ Açıklıklar çok büyük olmamalıdır.



HİPERSTATİK SİSTEMLERİN SICAKLIK ETKİSİ ALTINDA ÇÖZÜMÜ

- Sıcaklık değişiminden dolayı izostatik sistemde sadece deplasman oluşmasına karşın hiperstatik sistemde deplasmanla birlikte kesit tesirleri de meydana gelmektedir.

Süperpozisyon Denklemleri:

Hiperstatik sisteme dış etki olarak sıcaklık değişmesinin etkimesi halinde genel olarak süperpozisyon denklemlerinde bir değişiklik yoktur. Ancak, izostatik esas sistemde sıcaklık değişmesinden dolayı kesit zorları oluşmayacağından bu denklemlerde $M_0, N_0, T_0 = 0$ dır.

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + \dots + M_nX_n = \sum_{i=1}^n M_iX_i$$

$$N = N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 + \dots + N_nX_n = \sum_{i=1}^n N_iX_i$$

$$T = T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 + \dots + T_nX_n = \sum_{i=1}^n T_iX_i$$

Süreklilik Denklemleri

Sisteme yalnız sıcaklık değişmesi etkimesi halinde, geometrik uygunluk koşullarını ifade eden süreklilik denklemleri virtüel iş teoremi yardımıyla yeniden elde edilecektir.

d: kesit yüksekliği

t: üniform sıcaklık = $t_a = t_{\bar{u}}$, $\Delta ds = \epsilon t ds$

t_a = sistem içindeki sıcaklık

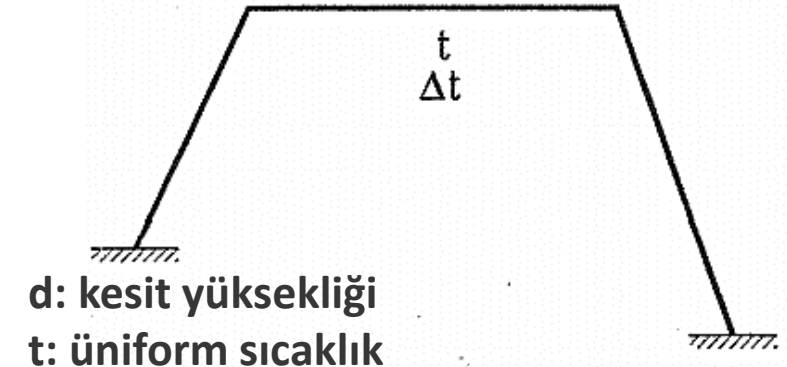
$t_{\bar{u}}$ = sistem dışındaki sıcaklık

$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}}$ farklı ısınma

$\Delta \varphi = (\epsilon t_a ds - \epsilon t_{\bar{u}} ds) / d = \epsilon \Delta t ds / d$

Şekildeğiştirmeler :

$$\begin{cases} \frac{\Delta \varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{\epsilon \Delta t}{d} \\ \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \epsilon t \\ \frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'} \end{cases}$$



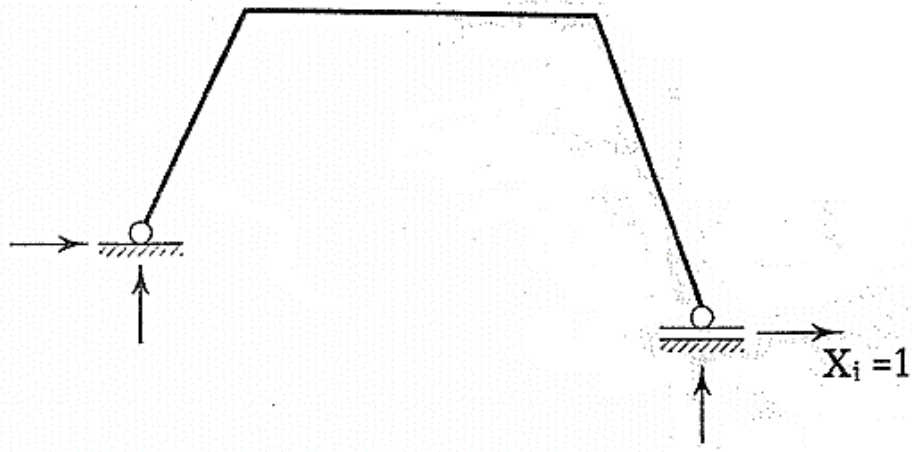
d: kesit yüksekliği

t: üniform sıcaklık

Hiperstatik sistem

(virtüel şekildeğiştirme durumu)

İç kuvvetler : M, N, T



d: kesit yüksekliği

ϵ =uzama katsayısı

t: üniform sıcaklık= $t_a=t_{\bar{u}}$, $\Delta ds=\epsilon t ds$

$\Delta ds/ds=\epsilon t$

t_a =sistem içindeki sıcaklık

$t_{\bar{u}}$ =sistem dışındaki sıcaklık

$\Delta t=t_a-t_{\bar{u}}$ farklı ısınma

$\Delta \varphi=(\epsilon t_a ds-\epsilon t_{\bar{u}} ds)/d=\epsilon \Delta t ds/d$

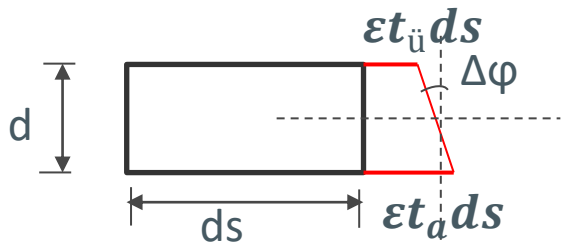
$\Delta \varphi/ds = \epsilon \Delta t/d$

İzostatik esas sistemde $X_i = 1$ yüklemesi

(yükleme durumu)

İç kuvvetler : M_i, N_i, T_i

$$\Delta t = t_a - t_{\bar{u}}$$



$$\Delta \varphi = \frac{\epsilon t_a ds - \epsilon t_{\bar{u}} ds}{d} = \frac{\epsilon \Delta t ds}{d}$$

İç kuvvetlerin işi=Dış kuvvetlerin işi

$$\int \left(M_i \frac{\Delta \varphi}{ds} + N_i \frac{\Delta ds}{ds} + T_i \frac{\Delta v}{ds} \right) ds = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

$$\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds + \int M_i \frac{\epsilon \Delta t}{d} ds + \int N_i \epsilon t ds = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad \text{KSD}$$

Bu Kapalı Süreklilik Denkleminde

$$\delta_{it} = \int M_i \frac{\epsilon \Delta t}{d} ds + \int N_i \epsilon t ds$$

dir.

M, N, T nin süperpozisyon denklemindeki ifadeleri yerlerine konularak Kapalı Süreklilik Denklemi yeniden düzenlenirse

$$\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \delta_{i3}X_3 + \dots + \delta_{in}X_n + \delta_{it} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

$i=1, 2, 3, \dots, n$ için bu denklemler açık şekilde yazılırsa;

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1t} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2t} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \dots + \delta_{3n}X_n + \delta_{3t} = 0$$

.....

.....

.....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nt} = 0$$

olarak **Açık Süreklilik Denklemleri** elde edilir.

Açık Süreklilik Denklemindeki katsayı ve sabitler

δ_{ik} : $X_k = 1$ yüklemesinden dolayı X_i bilinmeyi doğrultusunda oluşan yerdeğiştirme. Denklem takımının katsayıları adını alır. Bu terim

$$\delta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EI} ds + \int \frac{N_i N_k}{EF} ds + \int \frac{T_i T_k}{GF'} ds$$

şeklinde elde edilir.

Betti karşılık teoremi uyarınca $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ bağıntısı vardır.

δ_{it} : İzostatik esas sistemde sıcaklık değişmesinden dolayı X_i hiperstatik bilinmeyi doğrultusunda oluşan yerdeğiştirme. Sıcaklık değişmesi sabiti adını alır.

Δt farklı sıcaklık değişmesi terimi : $\int M_i \frac{\epsilon \Delta t}{d} ds$ **d: kesit yüksekliği**

t düzgün sıcaklık değişmesi terimi : $\int N_i \epsilon t ds$

$$\Rightarrow \delta_{it} = \int M_i \frac{\epsilon \Delta t}{d} ds + \int N_i \epsilon t ds$$

Her çubuk boyunca t, Δt , ϵ ve d nin sabit olması özel halinde

$$\delta_{it} = \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\epsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \epsilon t \int N_i ds \right]$$

şeklinde yazılır. Burada; $\int M_i ds$, $\int N_i ds$ çubuk üzerindeki M_i , N_i diyagramlarının alanıdır.

HESAPTA İZLENEN YOL

1- İzostatik esas sistem seçilir ve hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.

2- $X_i = 1$ birim yüklemeleri yapılarak gerekli kesit zorları diyagramları çizilir. Sisteme düzgün sıcaklık değişmesi etkimesi halinde N_i diyagramları mutlaka çizilmelidir.

3- δ_{ik} ve δ_{it} terimleri hesaplanır. Hesapta $EI_c \delta_{ik}$ terimleri kullanılıyorsa sıcaklık değişmesi

terimleride $EI_c \delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\epsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \epsilon t \int N_i ds \right]$ şeklinde yazılmalıdır.

Not: Sıcaklık değişmesine göre hesapta sonucun sayısal olarak elde edilebilmesi için EI_c nin sayısal değerinin bilinmesi gereklidir.

4- Denklem takımı çözülerek X_i bilinmeyenleri bulunur.

5- M, N, T kesit zorları diyagramları çizilir. Bunun için iki yoldan yararlanılabilir.

a) Süperpozisyon denklemleri ile ($M = M_1X_1 + M_2X_2 + \dots + M_nX_n$)

b) İzostatik esas sisteme hiperstatik bilinmeyenler yüklenir ve diyagramlar çizilir.

6- KSD ile kontrol edilir.

$$\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds + \delta_{it} = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

veya uzama ile kayma şekildeğişirmeleri terkedilirse Kapalı Süreklilik Denklemi,

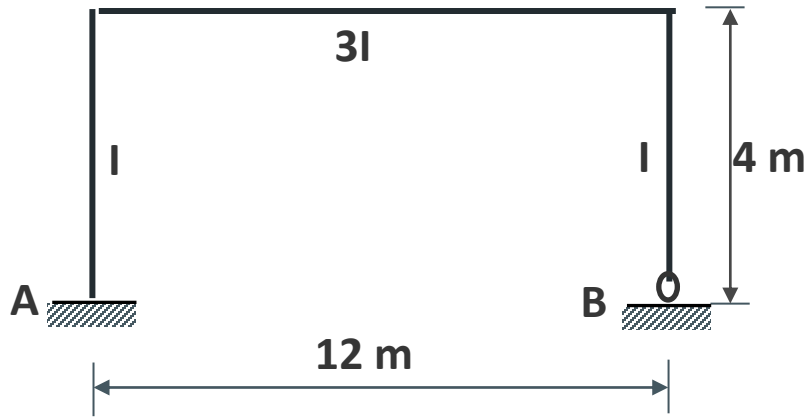
$$\int M_i M \frac{I_c}{I} ds + EI_c \delta_{it} = 0$$

olarak elde edilir.

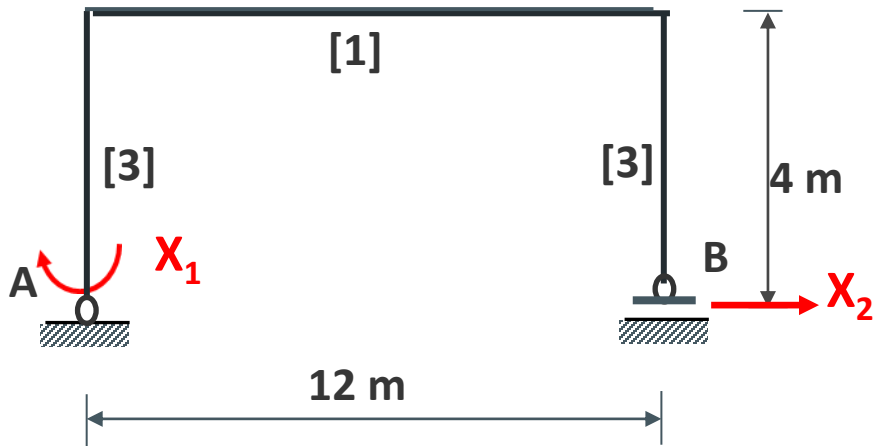
Not: Bu kontrolde δ_{it} terimleri kontrol edilemez.

UYGULAMA (sıcaklık değişimi)

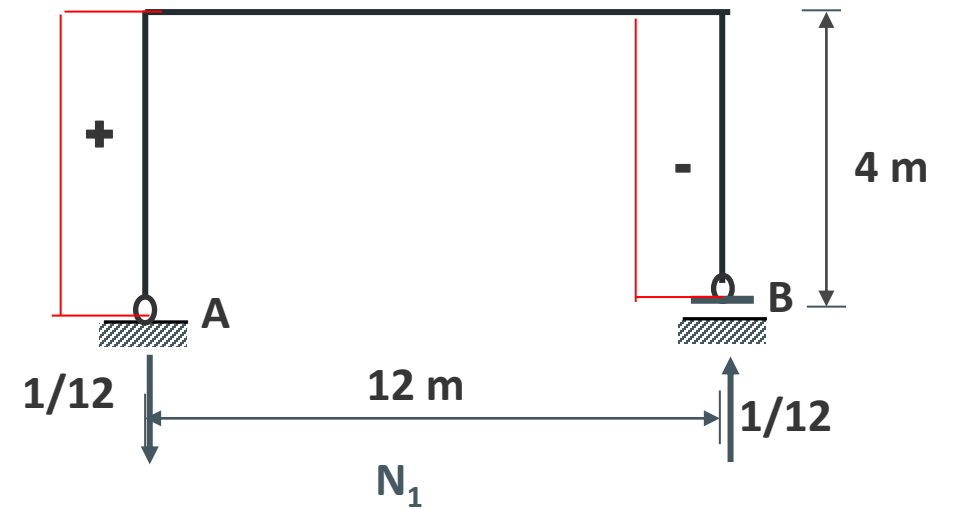
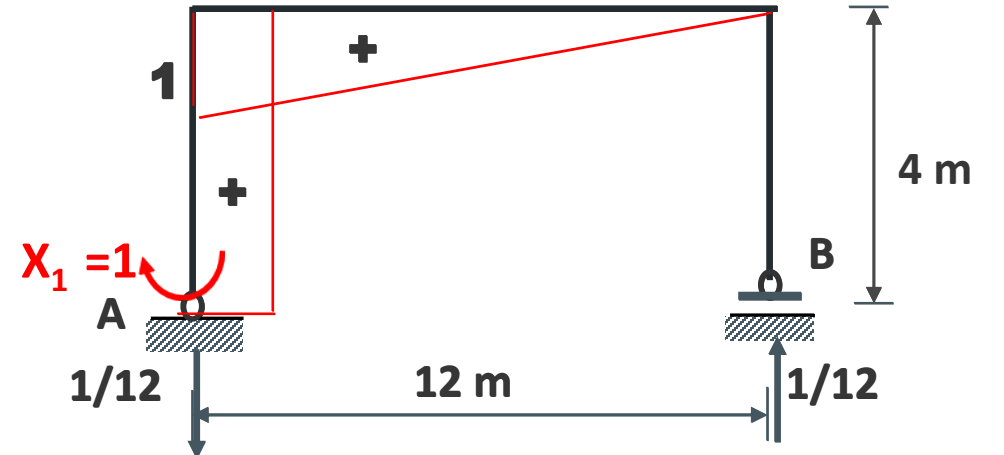
Şekildeki sistemin Moment diyagramını çiziniz.



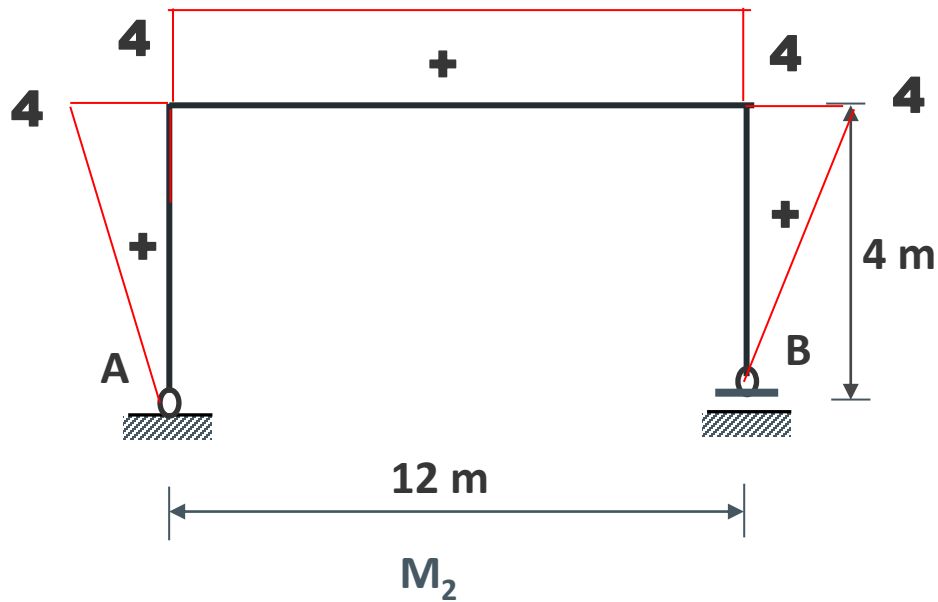
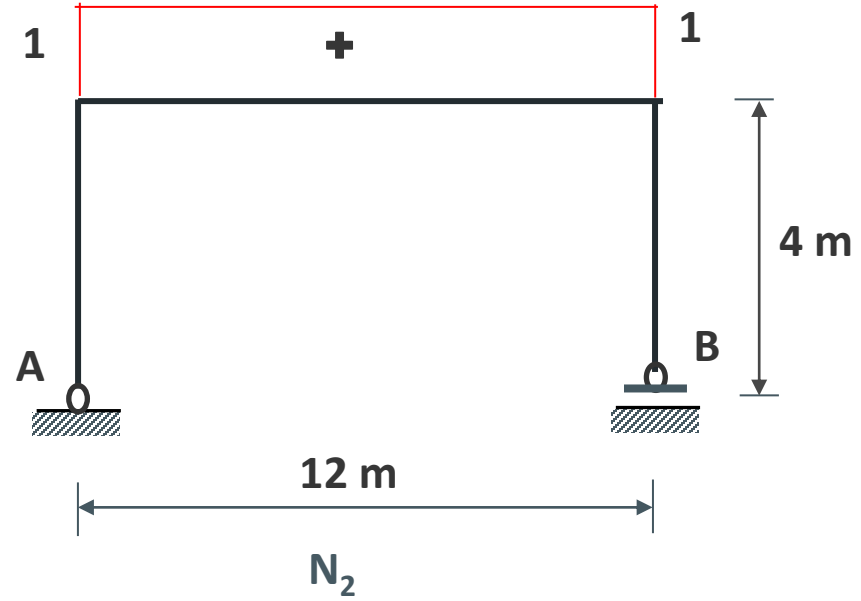
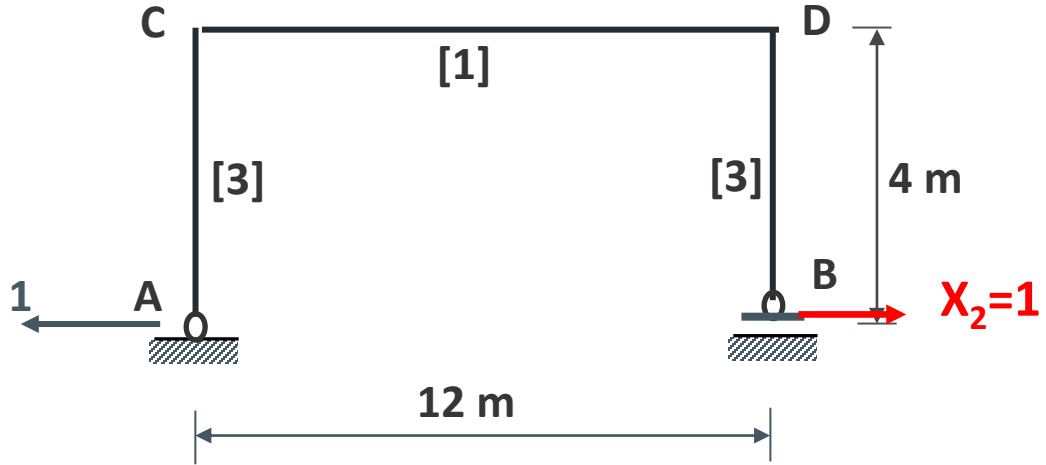
$$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ t/m}^2$$
$$\epsilon = 10^{-5}$$
$$I = 80 \text{ dm}^4$$
$$t_a = t_{\bar{u}} = t_s = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$



$X_1 = 1$ birim yüklemesi



$X_2=1$ birim yüklemesi

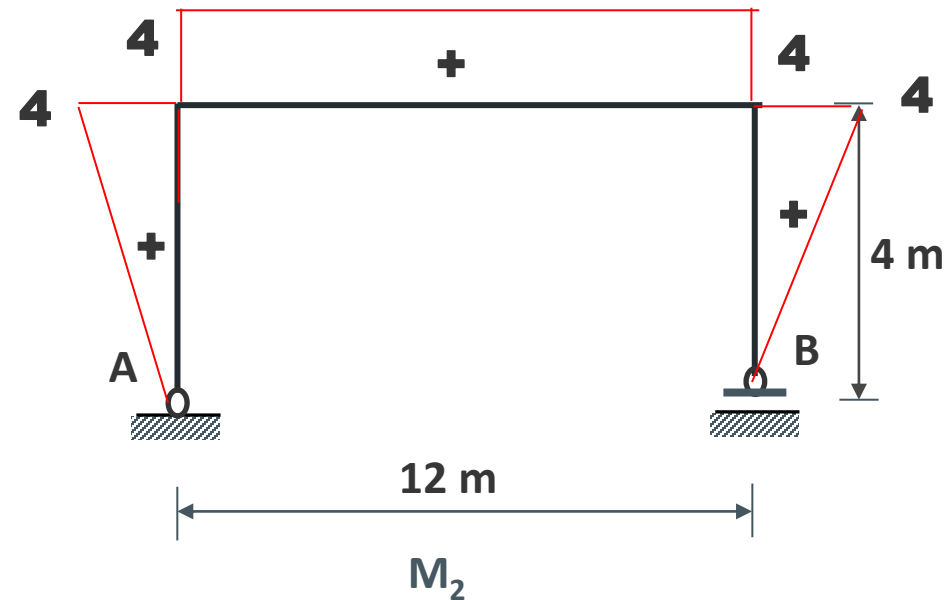
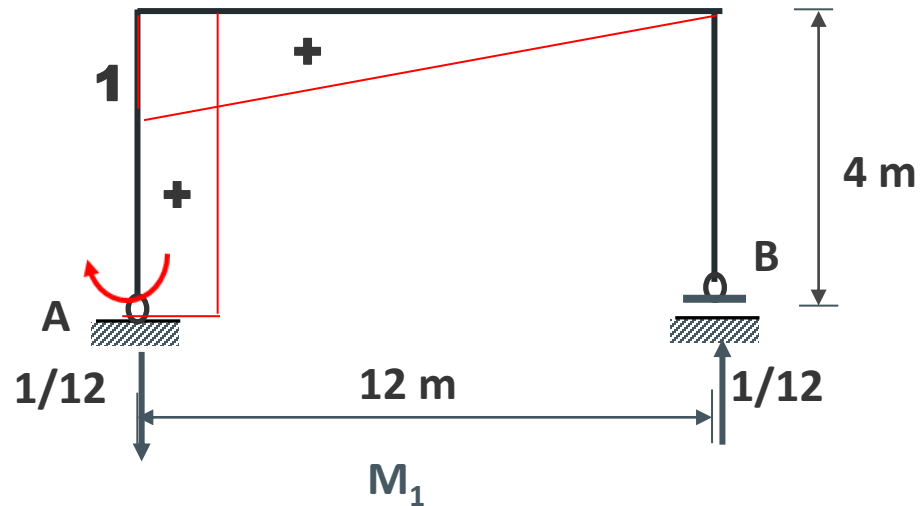


$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \quad EI_c \delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds$$

$$EI_c \delta_{11} = 4 * 1 * 1 * [3] + \frac{1}{3} * 12 * 1 * 1 * [1] = 12 + 4 = 16$$

$$EI_c \delta_{12} = EI_c \delta_{21} = \frac{1}{2} * 4 * 4 * 1 * [3] + \frac{1}{2} * 12 * 1 * 4 * [1] = 24 + 24 = 48$$

$$EI_c \delta_{22} = 2 \left(\frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 * [3] \right) + 12 * 4 * 4 * [1] = 320$$



$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \quad EI_c \delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds$$

$$EI_c \delta_{11} = 4 * 1 * 1 * [3] + \frac{1}{3} * 12 * 1 * 1 * [1] = 12 + 4 = 16$$

$$EI_c \delta_{12} = EI_c \delta_{21} = \frac{1}{2} * 4 * 4 * 1 * [3] + \frac{1}{2} * 12 * 1 * 4 * [1] = 24 + 24 = 48$$

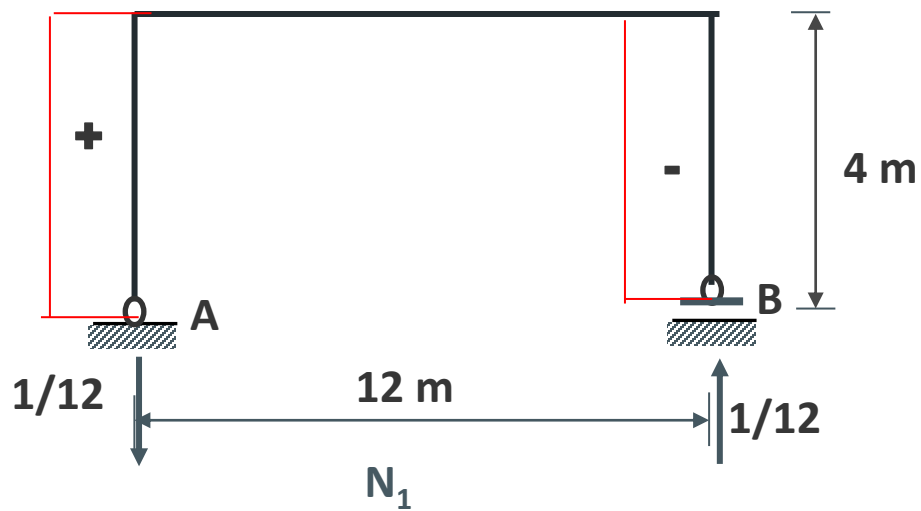
$$EI_c \delta_{22} = 2 \left(\frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 * [3] \right) + 12 * 4 * 4 * [1] = 320$$

	$k \text{ --- } k$ L	k L	$k_1 \text{ --- } k_2$ L	2° L
$i \text{ --- } i$ L	Lk	$\frac{1}{2} Lk$	$\frac{1}{2} L(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3} Lk_m$
$i \text{ --- } j$ L	$\frac{1}{2} Lk$	$\frac{1}{3} Lk$	$\frac{1}{6} L(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3} Lk_m$
$j \text{ --- } i$ L	$\frac{1}{2} Lk$	$\frac{1}{6} Lk$	$\frac{1}{6} L(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3} Lk_m$

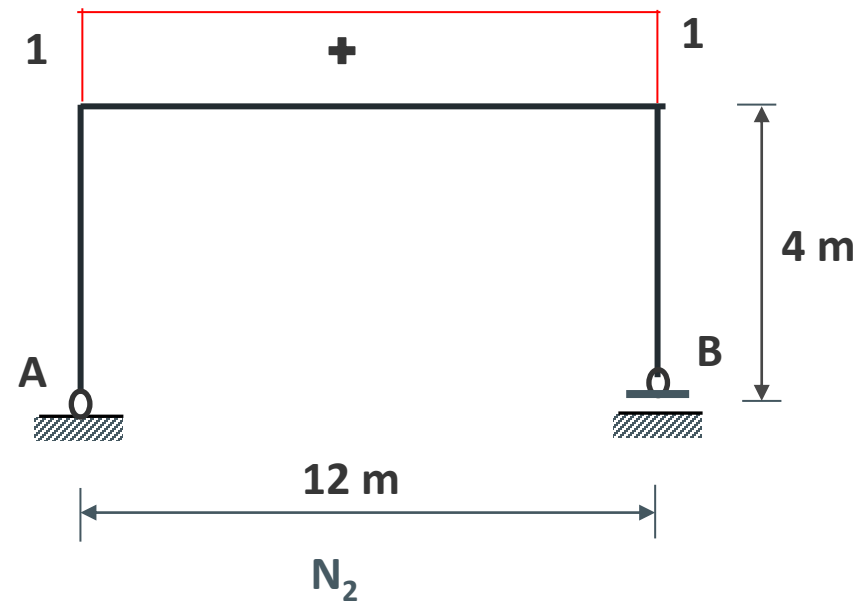
$$EI_c \varepsilon t_s = 2.1 * 10^6 * (3 * 80 * 10^{-4}) * 10^{-5} * 20 = 10.08$$

$$EI_c \delta_{1t} = EI_c \varepsilon t_s \int N_1 ds = 0$$

$$\frac{1}{12} * 4 - \frac{1}{12} * 4 = 0$$



$$EI_c \delta_{2t} = EI_c \varepsilon t_s \int N_2 ds = 10.08 * [1 * 12] = 120.96$$



$$EI_c \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} + EI_c \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$EI_c \delta_{11} X_1 + EI_c \delta_{12} X_2 + EI_c \delta_{10} = 0$$

$$EI_c \delta_{21} X_1 + EI_c \delta_{22} X_2 + EI_c \delta_{20} = 0$$

$$16X_1 + 48X_2 + 0 = 0$$

$$48X_1 + 320X_2 + 120.96 = 0$$

$$X_1 = 2.062 \text{ tm} \quad X_2 = -0.687 \text{ t}$$

$$X_1 = 2.062 \text{ tm} \quad X_2 = -0.687 \text{ t}$$

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2$$

$$M_0 = 0 \text{ dış yük} = 0$$

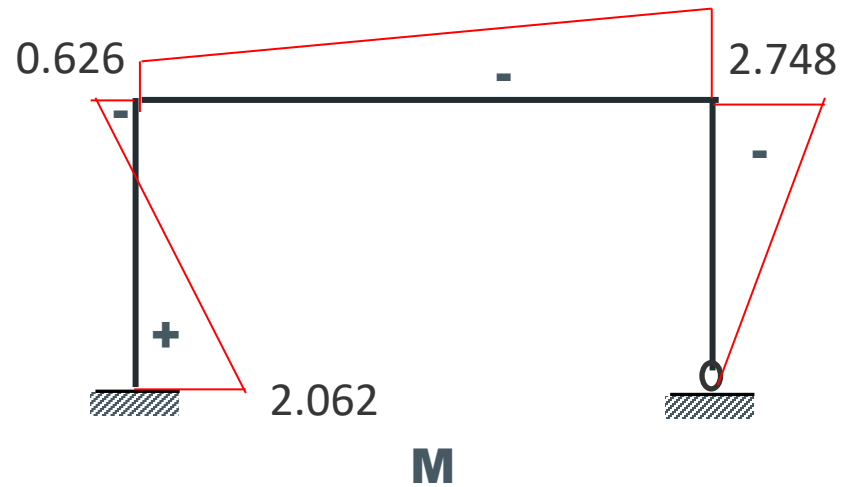
$$M_{(1)} = 1 * 2.062 + 0 * (-0.687) = 2.062 \text{ tm}$$

$$M_{(2)} = 1 * 2.062 + 4 * (-0.687) = -0.626 \text{ tm}$$

$$M_{(3)} = M_{(2)} = -0.626 \text{ tm}$$

$$M_{(4)} = 0 * 2.062 + 4 * (-0.687) = -2.748 \text{ tm}$$

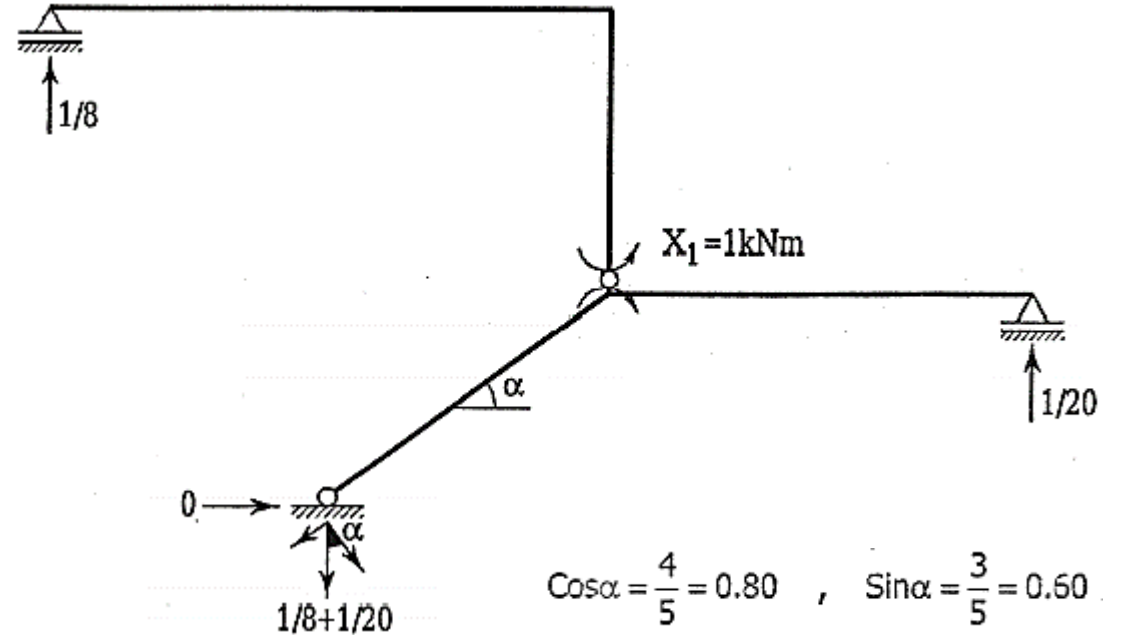
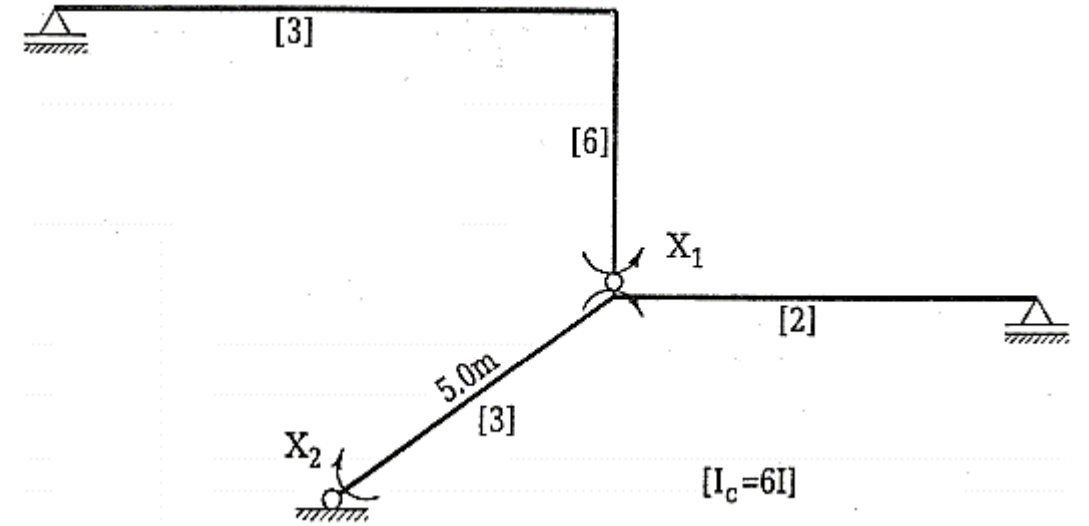
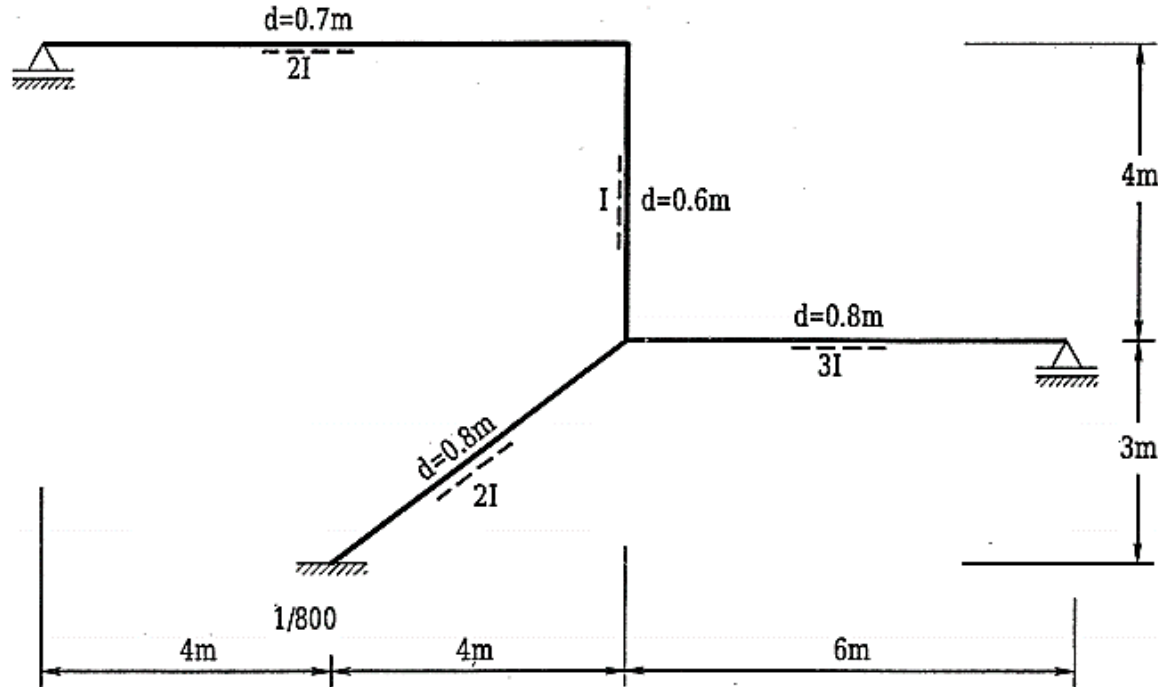
$$M_{(5)} = M_{(4)} = -2.748 \text{ tm} \quad M_{(6)} = 0$$

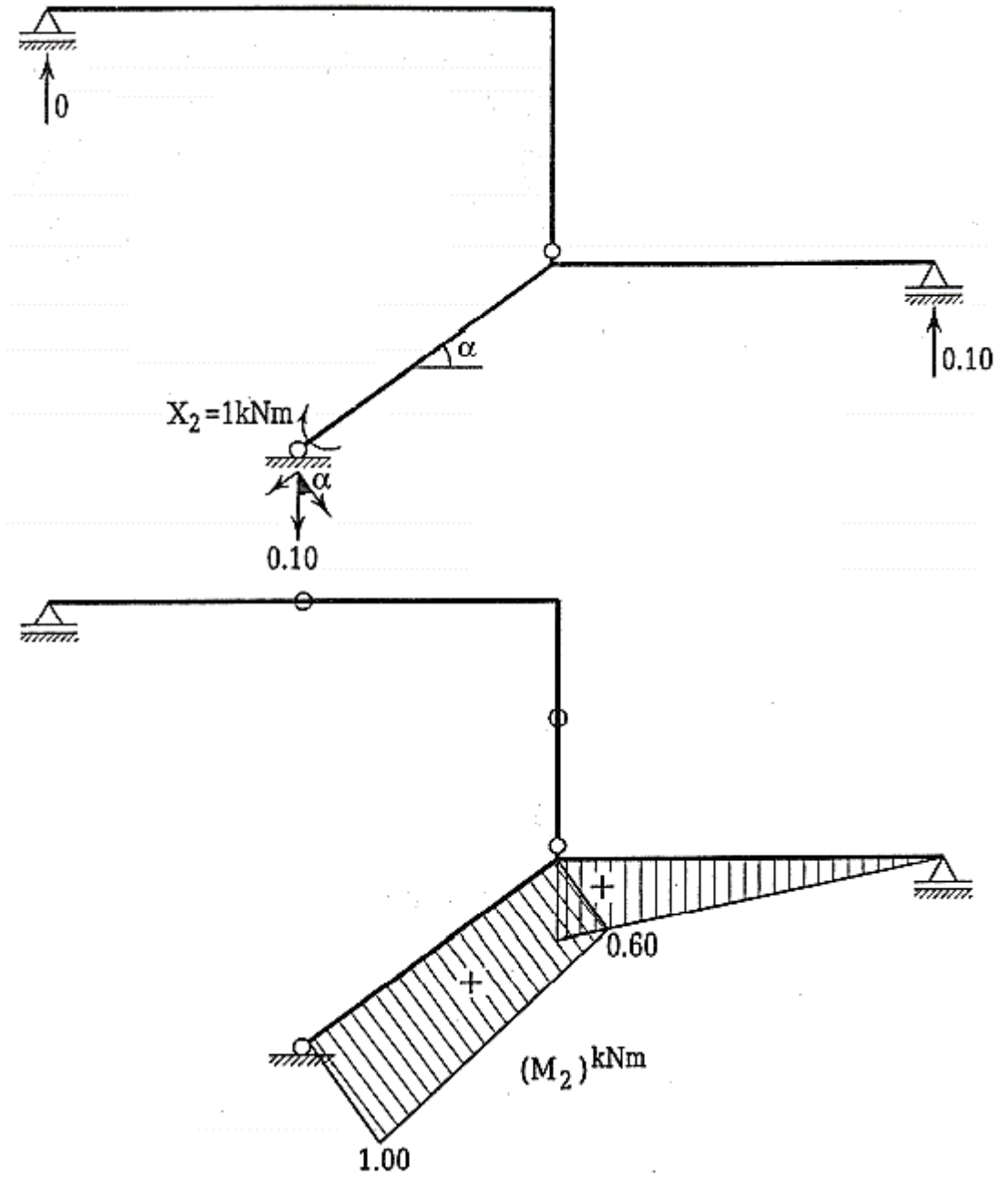
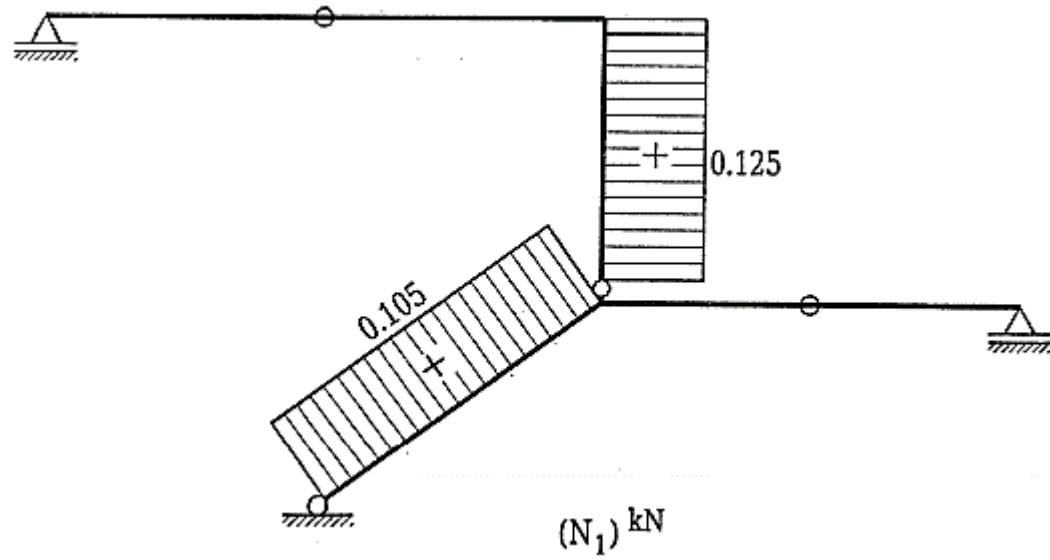
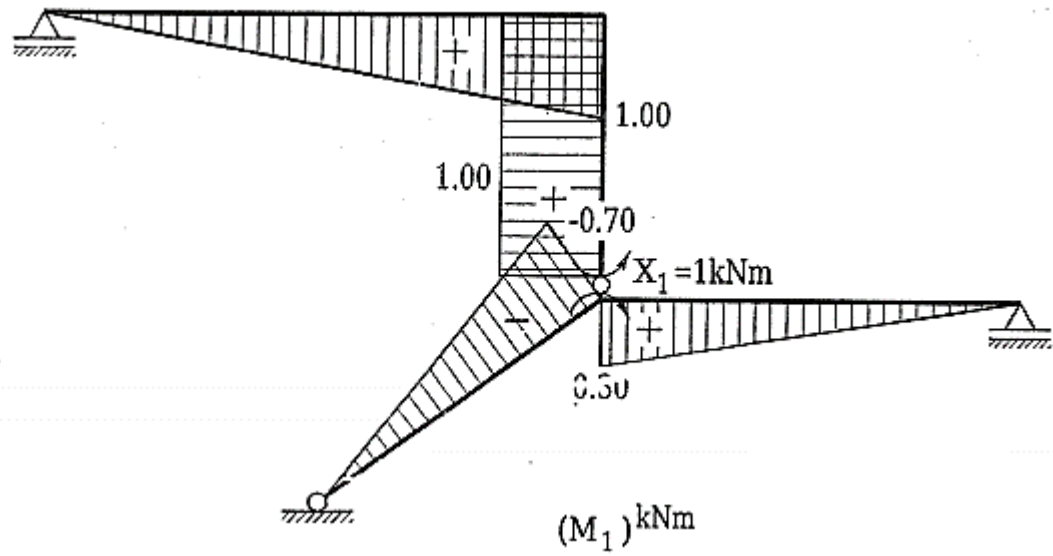


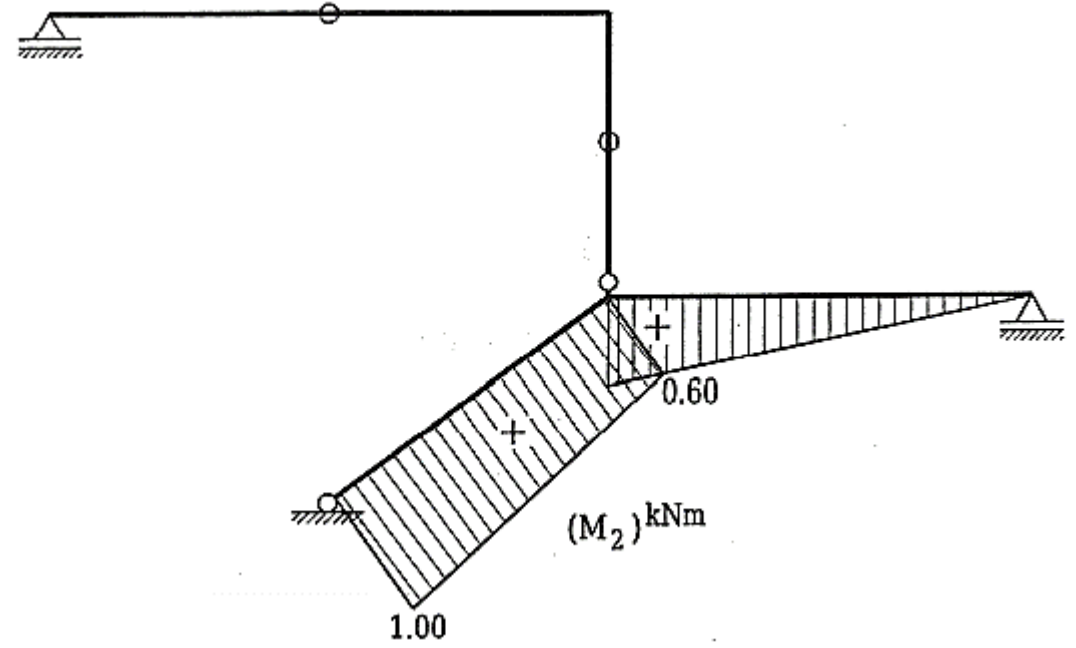
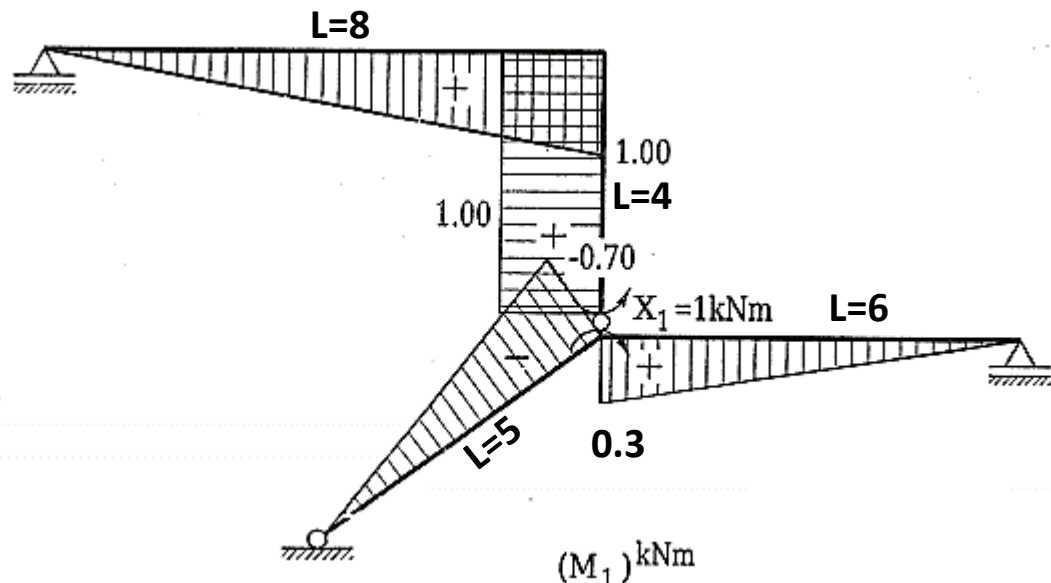
ÖRNEK 6

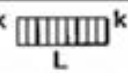
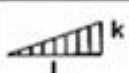
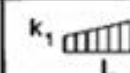
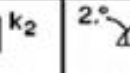
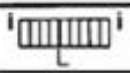


Şekilde verilen hiperstatik sistemde;

- $t=+20\text{ }^{\circ}\text{C}$ düzgün sıcaklık değişmesi sonucu oluşan M diyagramını belirleyiniz.
- $\Delta t=+15\text{ }^{\circ}\text{C}$ farklı sıcaklık değişmesi sonucu oluşan M diyagramını belirleyiniz.







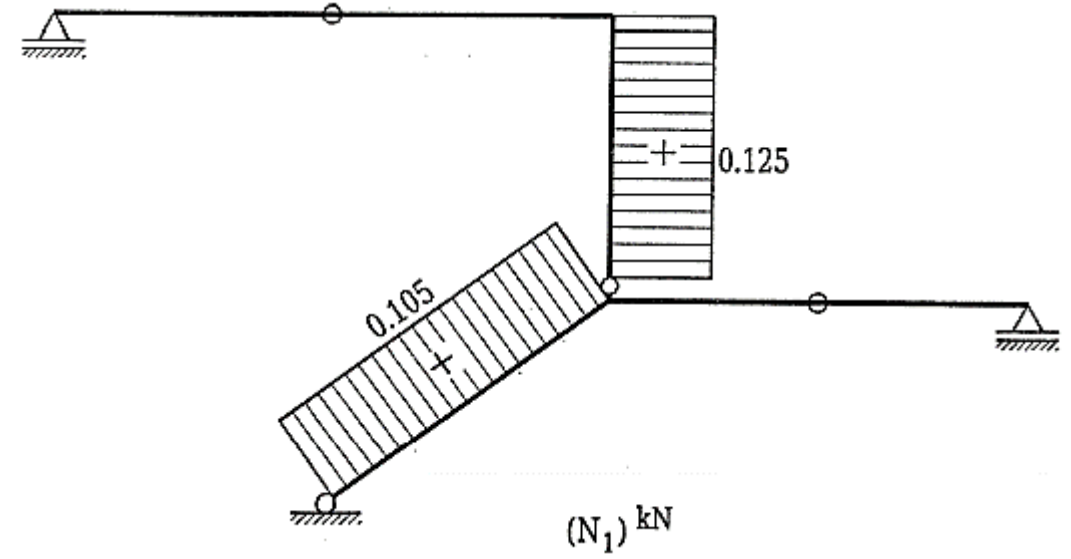
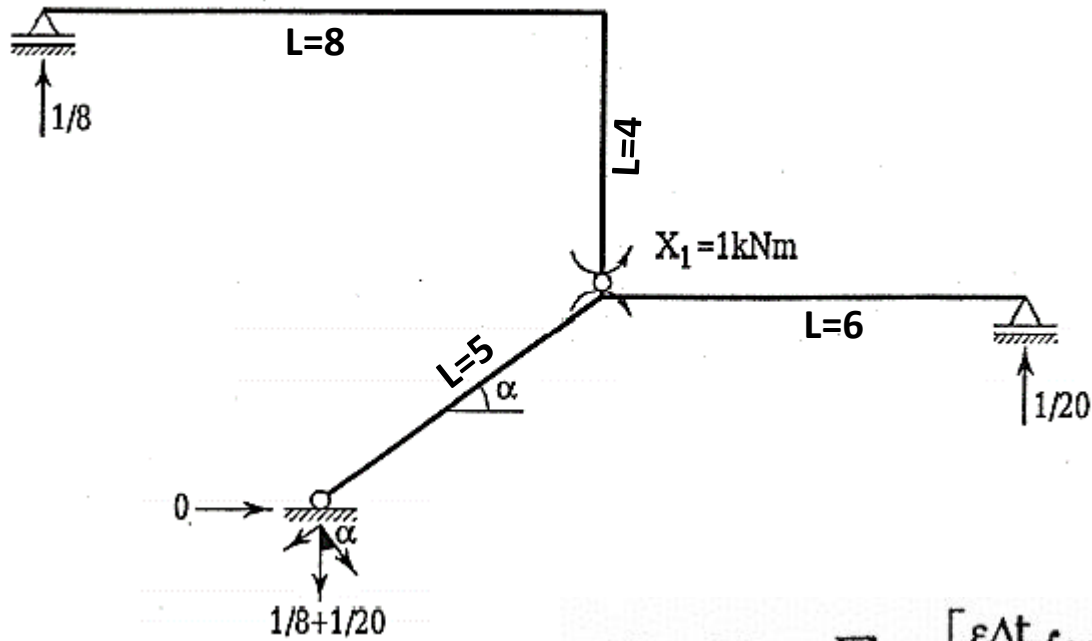
	k 		k_1 	2° 
	Lk	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{2}L(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{3}Lk$	$\frac{1}{6}L(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{6}Lk$	$\frac{1}{6}L(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$

$$EI_c \delta_{11} = \frac{1}{3} \times 8 \times 1 \times 1 \times [3] + 4 \times 1 \times 1 \times [6] + \frac{1}{3} \times 5 \times (0.7)^2 \times [3] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{3} \times 6 \times (0.3)^2 \times [2] = 34.810$$

$$EI_c \delta_{22} = \frac{1}{6} \times 5 \times (2 \times 1 + 2 \times 0.6 + 2 \times (0.6)^2) \times [3] + \frac{1}{3} \times 6 \times (0.6)^2 \times [2] = 11.240$$

$$EI_c \delta_{12} = \frac{1}{6} \times 5 \times (-0.7) \times (2 \times 0.6 + 1) \times [3] + \frac{1}{3} \times 6 \times 0.3 \times 0.6 \times [2] = -3.130$$

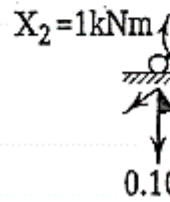
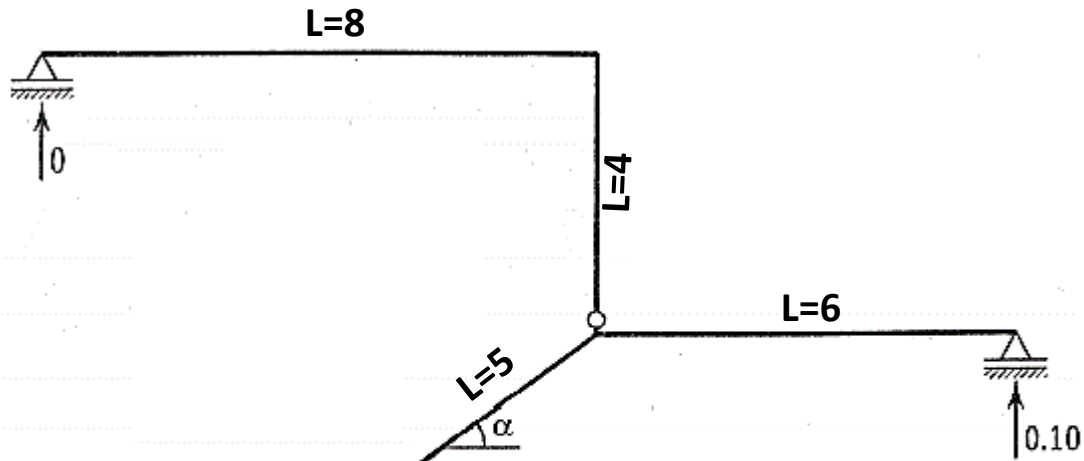


$$EI_c \delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\epsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \epsilon t \int N_i ds \right]$$

a) $t = +20^\circ\text{C}$ için, $E = 100000 \text{ kN/m}^2$, $\epsilon = 10^{-5}$, $I_c = 6 \text{ I}$
 $t_a = t_{\bar{u}} = t_s = 20^\circ\text{C}$

$$EI_c \delta_{1t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 20 \times (0.125 \times 4 + 0.105 \times 5) = 123.00$$

$$EI_c \delta_{2t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 20 \times (0.06 \times 5) = 36.00$$

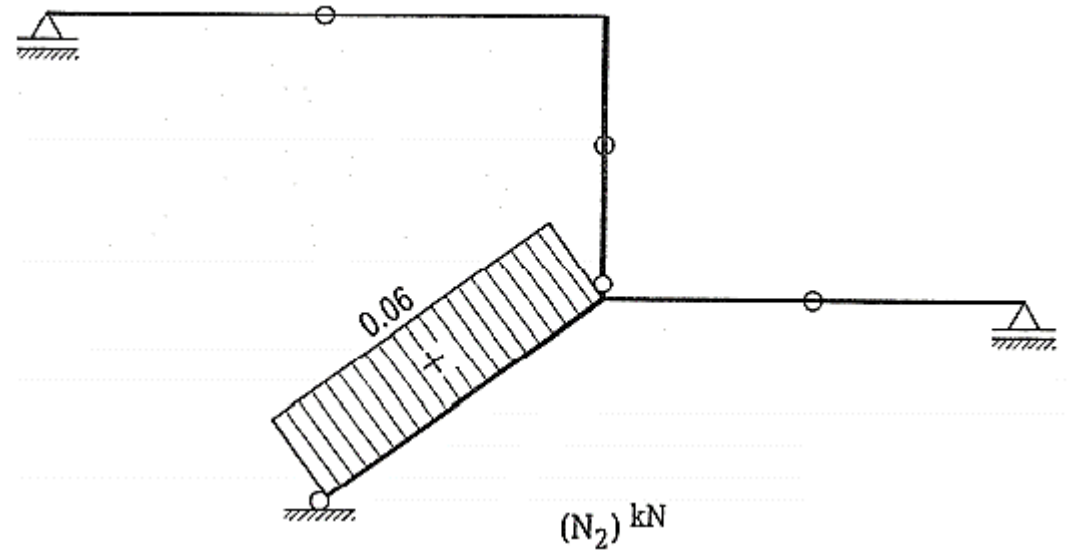


$$EI_c \delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\epsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \epsilon t \int N_i ds \right]$$

a) $t = +20^\circ\text{C}$ için, $E = 100000 \text{ kN/m}^2$ $\epsilon = 10^{-5}$ $I_c = 6 \text{ I}$
 $t_a = t_{\bar{u}} = t_s = 20^\circ\text{C}$

$$EI_c \delta_{1t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 20 \times (0.125 \times 4 + 0.105 \times 5) = 123.00$$

$$EI_c \delta_{2t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 20 \times (0.06 \times 5) = 36.00$$

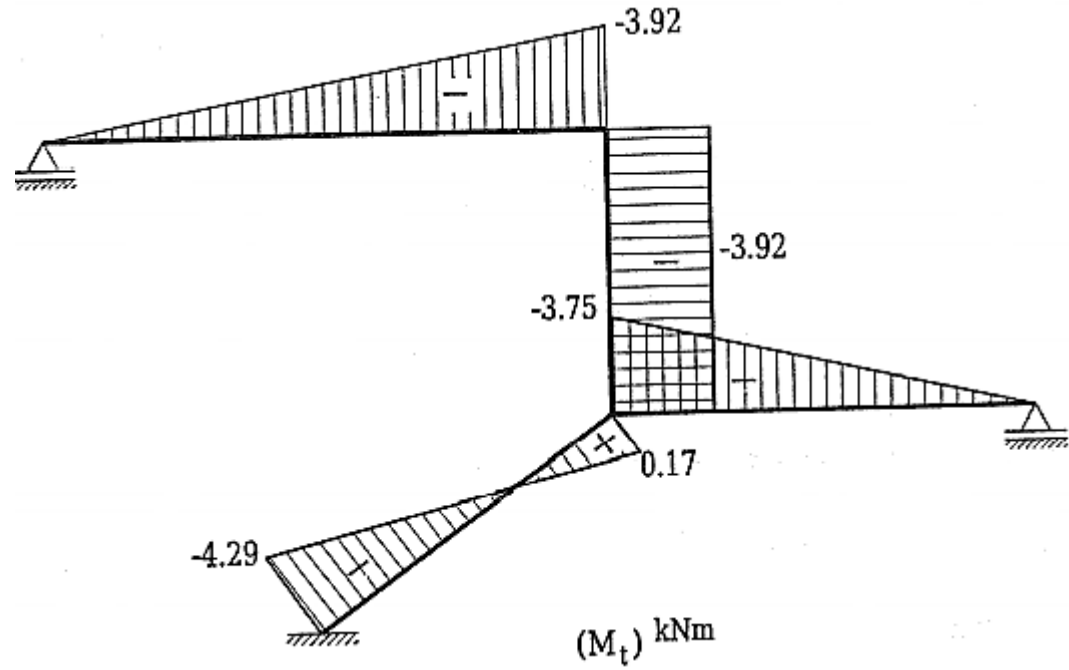
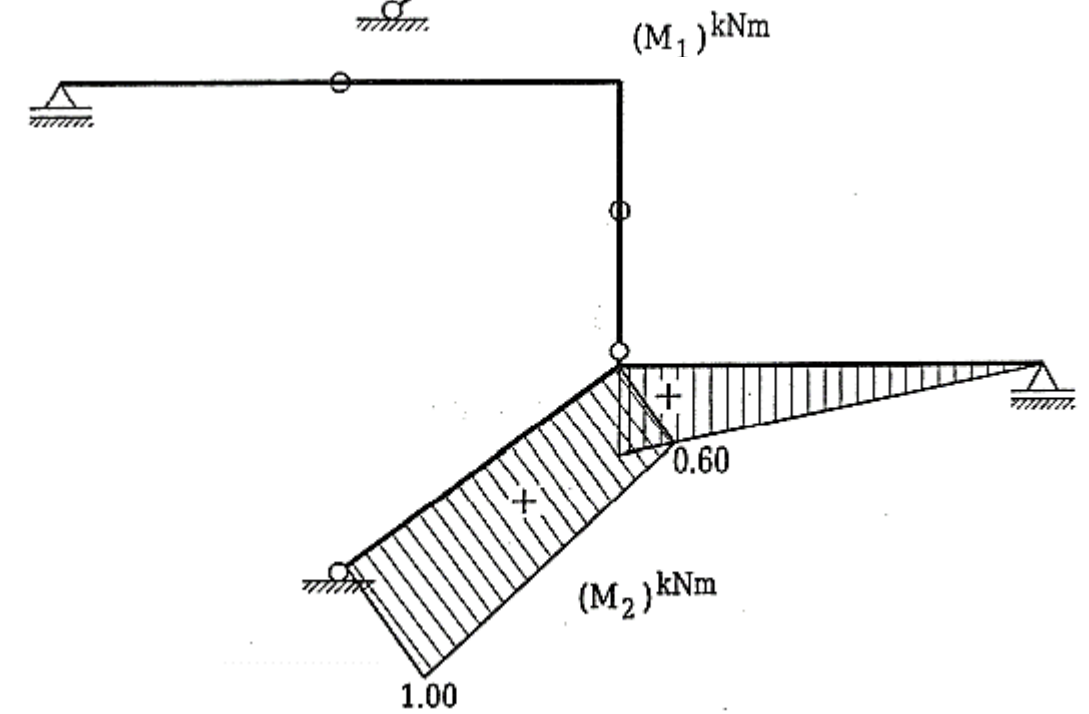
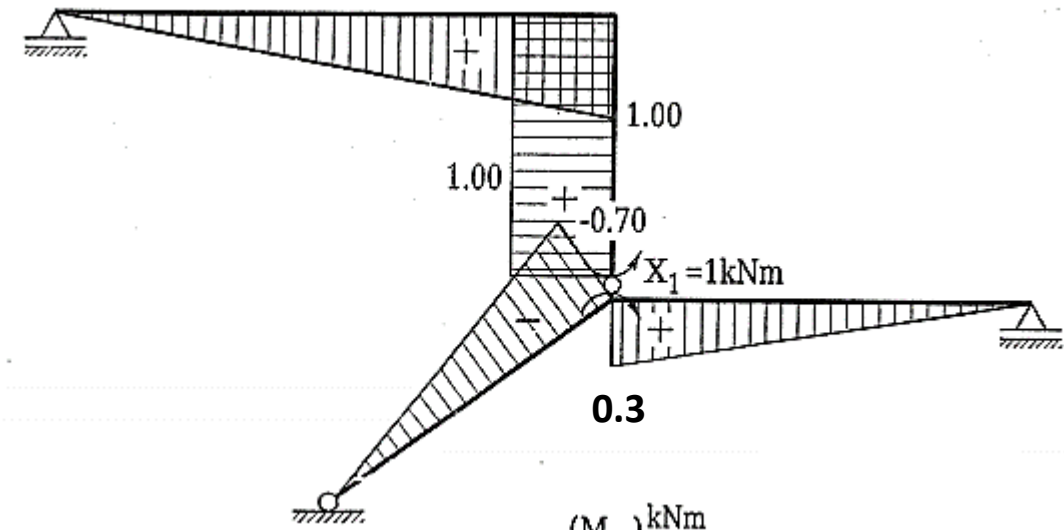


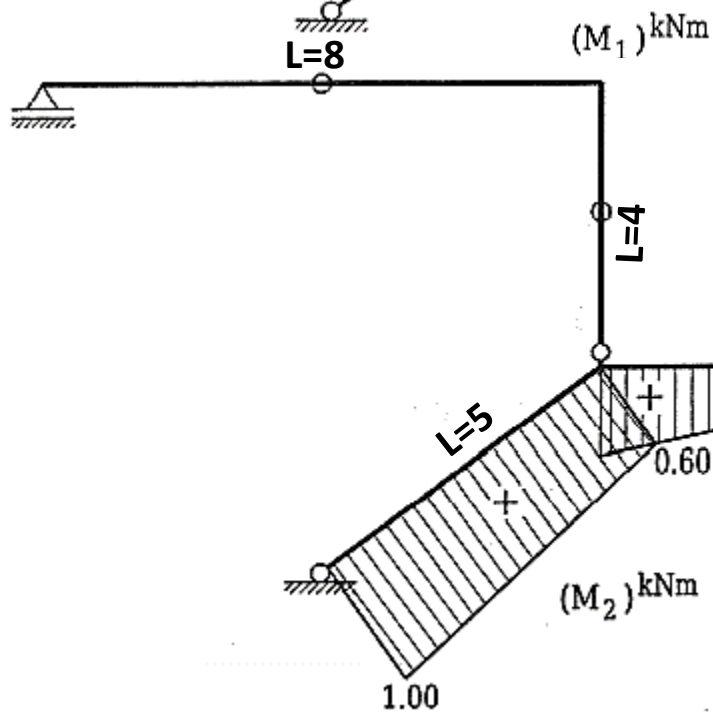
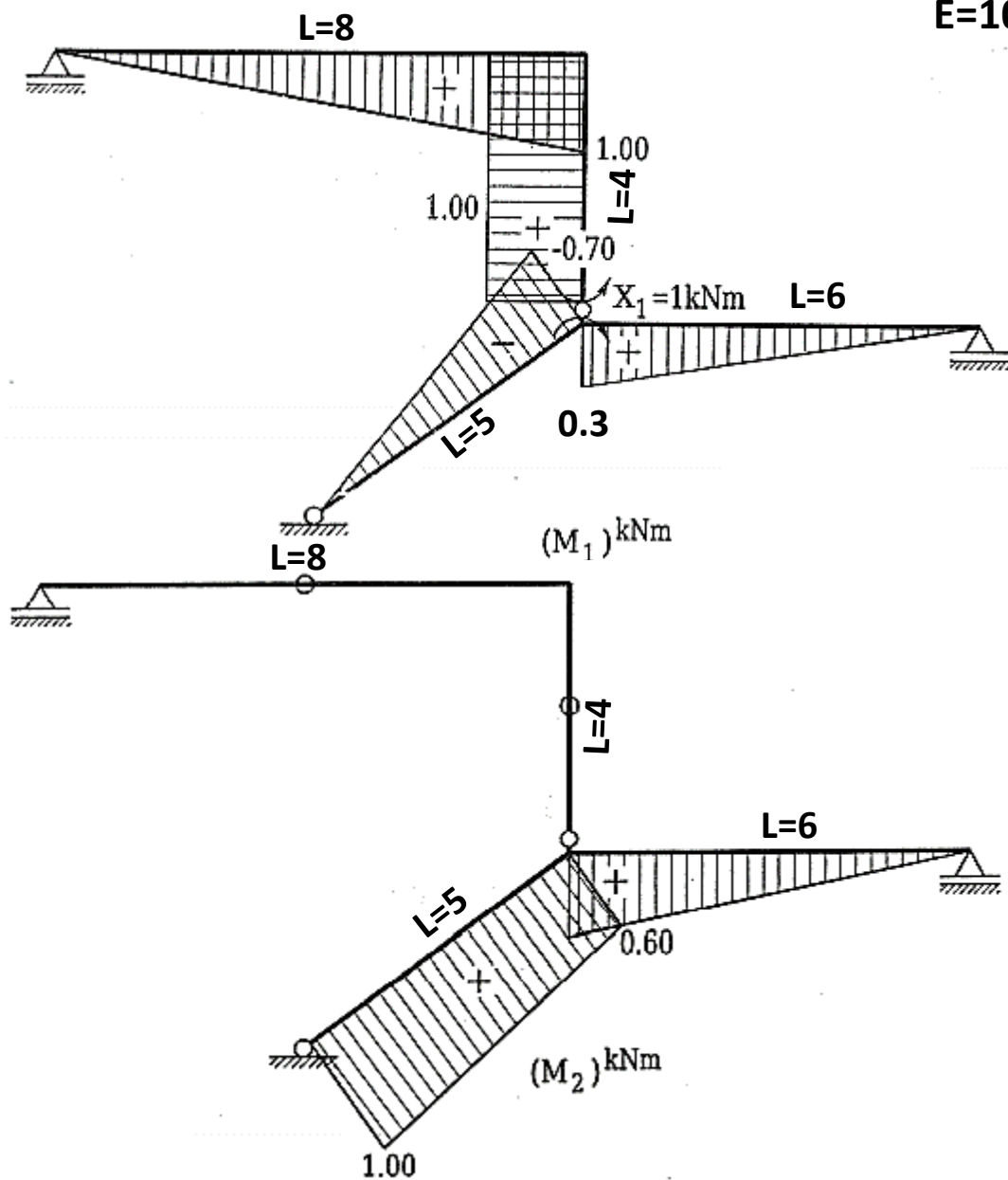
Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

$$\begin{bmatrix} 34.810 & -3.130 \\ -3.130 & 11.240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -123.00 \\ -36.00 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = -3.920, X_2 = -4.290$$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi.

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \Rightarrow M = -3.920 \times M_1 - 4.290 \times M_2$$





$$E=100000 \text{ kN/m}^2 \quad \varepsilon=10^{-5} \quad I_c=6 \text{ I} \quad EI_c \delta_{it} = EI_c \sum_{\text{tüm çubuklarda}} \left[\frac{\varepsilon \Delta t}{d} \int M_i ds + \varepsilon t \int N_i ds \right]$$

b) $\Delta t = +15^\circ\text{C}$ için,

$$EI_c \delta_{1\Delta t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 15 \times \left(\frac{1 \times 8}{2 \times 0.7} + \frac{1 \times 4}{0.6} + \frac{0.3 \times 6}{2 \times 0.8} + \frac{5 \times (-0.70)}{2 \times 0.80} \right) = 1018.661$$

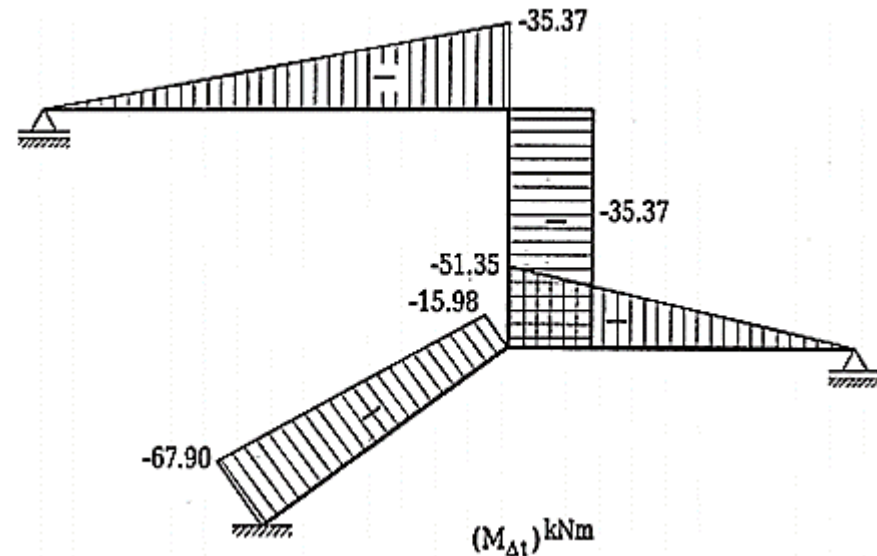
$$EI_c \delta_{2\Delta t} = 6 \times 100000 \times 10^{-5} \times 15 \times \left(\frac{(1 + 0.6) \times 5}{2 \times 0.8} + \frac{0.6 \times 6}{2 \times 0.8} \right) = 652.500$$

Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

$$\begin{bmatrix} 34.810 & -3.130 \\ -3.130 & 11.240 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1018.661 \\ -652.500 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = -35.369, X_2 = -67.901$$

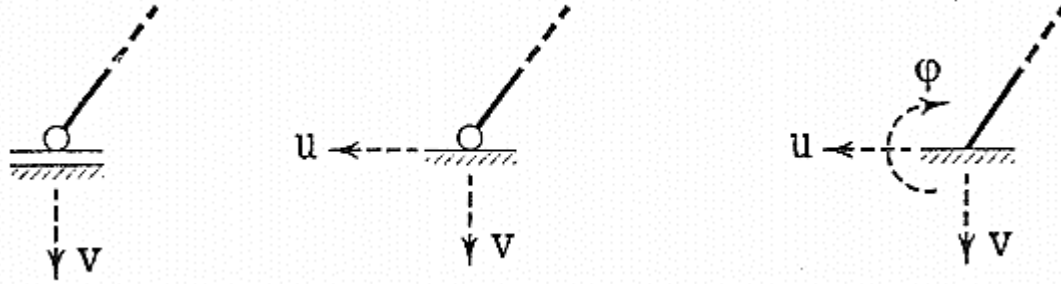
Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \Rightarrow M = -35.369 \times M_1 - 67.901 \times M_2$$



MESNET ÇÖKMELERİNİN ETKİSİ ALTINDA BULUNAN HİPERSTATİK SİSTEMLERİN HESABI

- Mesnetlerin tanımına uymayan yer değiştirmelere mesnet çökmesi denilmektedir.



u, v : doğrusal mesnet çökmesi (m)

ϕ : açısal mesnet çökmesi (mesnet dönmesi) (radyan)

Hiperstatik sisteme dış etki olarak yalnız mesnet çökmelerinin etkimesi halinde süperpozisyon denklemleri

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + M_3X_3 + \dots + M_nX_n = \sum_{i=1}^n M_iX_i$$

$$N = N_1X_1 + N_2X_2 + N_3X_3 + \dots + N_nX_n = \sum_{i=1}^n N_iX_i$$

$$T = T_1X_1 + T_2X_2 + T_3X_3 + \dots + T_nX_n = \sum_{i=1}^n T_iX_i$$

Dış yük=0
 $M_0, N_0, T_0 = 0$

şeklindedir.

Açık Süreklilik Denklemleri ise,

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \dots + \delta_{1n}X_n = J_1$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \dots + \delta_{2n}X_n = J_2$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \dots + \delta_{3n}X_n = J_3$$

.....

.....

.....

$$\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \delta_{n3}X_3 + \dots + \delta_{nn}X_n = J_n$$

olarak elde edilir.

Görüldüğü gibi burada dış yüklerden ya da sıcaklık değişiminden gelen terimler yerine mesnet çökmelerinin etkisini gösteren J sabitleri mevcuttur. Birim yüklemeler sonucu oluşan mesnet tepkileri ancak sistemde mesnet çökmeleri varsa iş yapmaktadır. Yani burada dış kuvvetlerin yaptığı iş sıfırdan farklı olmaktadır.

Sonuç:



$J_i: X_i = 1$ yüklemesindeki mesnet tepkilerinin mesnet çökmelerinde yaptığı iş.

(Mesnet tepkileri \times kendi doğrultularındaki mesnet çökmeleri)

HESAPTA İZLENEN YOL

- 1- İzostatik esas sistem seçilir ve hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.
 - 2- $X_i = 1$ birim yüklemeleri yapılarak gerekli kesit zorları diyagramları çizilir.
 - 3- δ_{ik} ve J_i terimleri hesaplanır. Hesapta $EI_c \delta_{ik}$ terimleri kullanılıyorsa mesnet çökmesi terimleride $EI_c J_i$ olmalıdır.
- Not:** Mesnet çökmelerine göre hesapta sonucun sayısal olarak elde edilebilmesi için EI_c nin sayısal değerinin bilinmesi gereklidir.
- 4- Denklem takımı çözülerek X_i bilinmeyenleri bulunur.

5- M , N , T kesit zorları diyagramları çizilir. Bunun için iki yoldan yararlanılabilir.

a) Süperpozisyon denklemleri ile ($M = M_1X_1 + M_2X_2 + \dots + M_nX_n$)

b) İzostatik esas sisteme hiperstatik bilinmeyenler yüklenir ve diyagramlar çizilir.



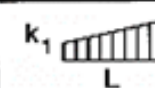
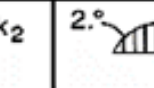
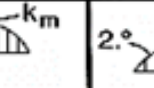




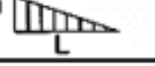
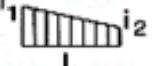
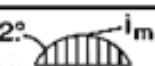
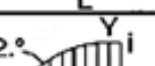
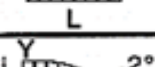
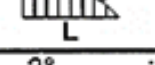
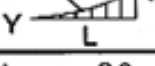

6- KSD ile kontrol edilir.

$$\int M_i \frac{M}{EI} ds + \int N_i \frac{N}{EF} ds + \int T_i \frac{T}{GF'} ds = J_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

veya uzama ve kayma şekildeğiştirmeleri terkedilirse Kapalı Süreklilik Denklemi,

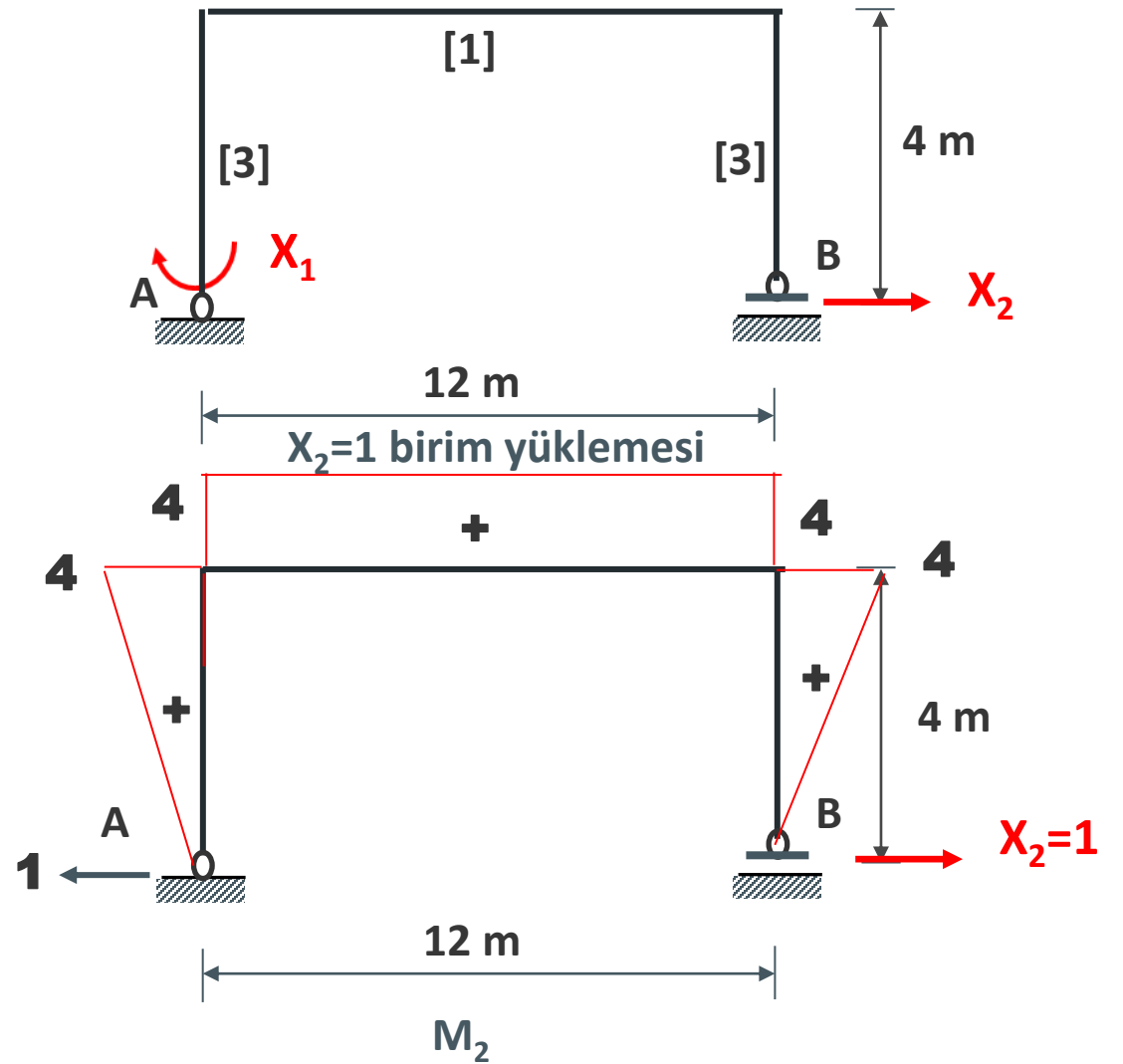
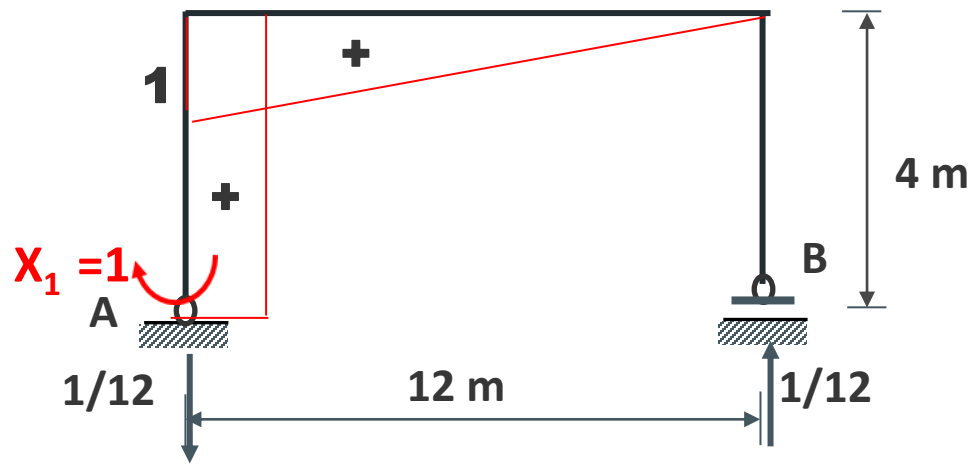
$$\int M_i M \frac{I_c}{I} ds = EI_c J_i$$

olarak elde edilir.

ÇARPIM TABLOSU $(\int_0^L M_k ds)$							
							
	Lik	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{2}L(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3}Lk_m$	$\frac{2}{3}Lk$	$\frac{1}{3}Lk$	$\frac{1}{2}Lk$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{3}Lk$	$\frac{1}{6}L(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$	$\frac{5}{12}Lk$	$\frac{1}{4}Lk$	$\frac{1}{6}L(1 + \alpha)k$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{6}Lk$	$\frac{1}{6}L(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$	$\frac{1}{4}Lk$	$\frac{1}{12}Lk$	$\frac{1}{6}L(1 + \beta)k$
	$\frac{1}{2}L(i_1 + i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1 + 2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1 + i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1 + 5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1 + 3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1 + \beta)i_1 + (1 + \alpha)i_2]$
	$\frac{2}{3}Lk_m$	$\frac{1}{3}Lk_m$	$\frac{1}{3}Lk_m(k_1 + k_2)$	$\frac{8}{15}Lk_m$	$\frac{7}{15}Lk_m$	$\frac{1}{5}Lk_m$	$\frac{1}{3}L(1 + \alpha\beta)k_m$
	$\frac{2}{3}Lk$	$\frac{5}{12}Lk$	$\frac{1}{12}L(3k_1 + 5k_2)$	$\frac{7}{15}Lk_m$	$\frac{8}{15}Lk$	$\frac{3}{10}Lk$	$\frac{1}{12}L(5 - \beta - \beta^2)k$
	$\frac{2}{3}Lk$	$\frac{1}{4}Lk$	$\frac{1}{12}L(5k_1 + 3k_2)$	$\frac{7}{15}Lk_m$	$\frac{11}{30}Lk$	$\frac{2}{15}Lk$	$\frac{1}{12}L(5 - \alpha - \alpha^2)k$
	$\frac{1}{3}Lk$	$\frac{1}{4}Lk$	$\frac{1}{12}L(k_1 + 3k_2)$	$\frac{1}{5}Lk_m$	$\frac{3}{10}Lk$	$\frac{1}{5}Lk$	$\frac{1}{12}L(1 + \alpha + \alpha^2)k$
	$\frac{1}{3}Lk$	$\frac{1}{12}Lk$	$\frac{1}{12}L(3k_1 + k_2)$	$\frac{1}{5}Lk_m$	$\frac{2}{15}Lk$	$\frac{1}{30}Lk$	$\frac{1}{12}L(1 + \beta + \beta^2)k$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{6}L(1 + \alpha)k$	$\frac{1}{6}L[(1 + \beta)k_1 + (1 + \alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1 + \alpha\beta)k_m$	$\frac{1}{12}L(5 - \beta - \beta^2)k$	$\frac{1}{12}L(1 + \alpha + \alpha^2)k$	$\frac{1}{3}Lk$

Y yazılı uçlarda 2.° parabolünün teğeti yataydır.

UYGULAMA (Mesnet çökmeleri)



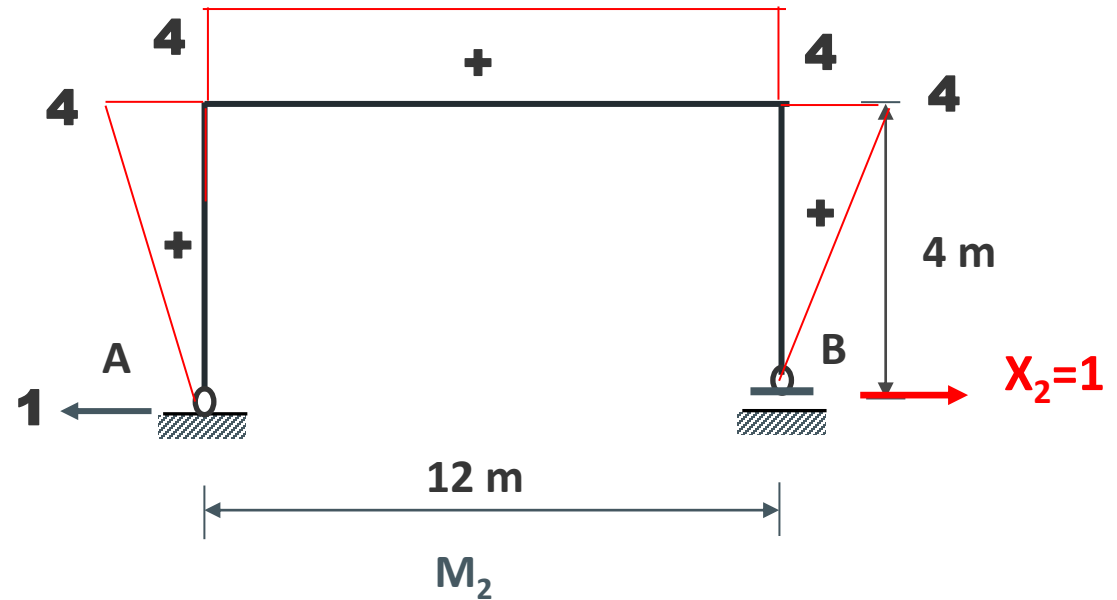
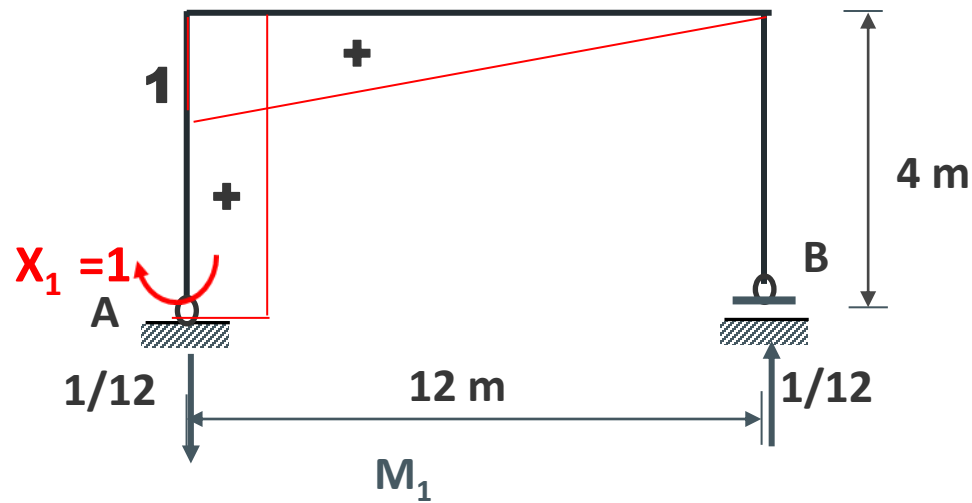
$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} \quad EI_c \delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{I_c}{I} ds$$

	$k \frac{\square}{L}$	$\frac{\triangle}{L} k$	$k_1 \frac{\square}{L} k_2$	$2^\circ \frac{\square}{L} k_m$
$\frac{\square}{L} i$	Lk	$\frac{1}{2} Lk$	$\frac{1}{2} L(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3} Lk_m$
$\frac{\triangle}{L} i$	$\frac{1}{2} Lk$	$\frac{1}{3} Lk$	$\frac{1}{6} L(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3} Lk_m$
$\frac{\triangle}{L} i$	$\frac{1}{2} Lk$	$\frac{1}{6} Lk$	$\frac{1}{6} L(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3} Lk_m$

$$EI_c \delta_{11} = 4 * 1 * 1 * [3] + \frac{1}{3} * 12 * 1 * 1 * [1] = 12 + 4 = 16$$

$$EI_c \delta_{12} = EI_c \delta_{21} = \frac{1}{2} * 4 * 4 * 1 * [3] + \frac{1}{2} * 12 * 1 * 4 * [1] = 24 + 24 = 48$$

$$EI_c \delta_{22} = 2 \left(\frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 * [3] \right) + 12 * 4 * 4 * [1] = 320$$



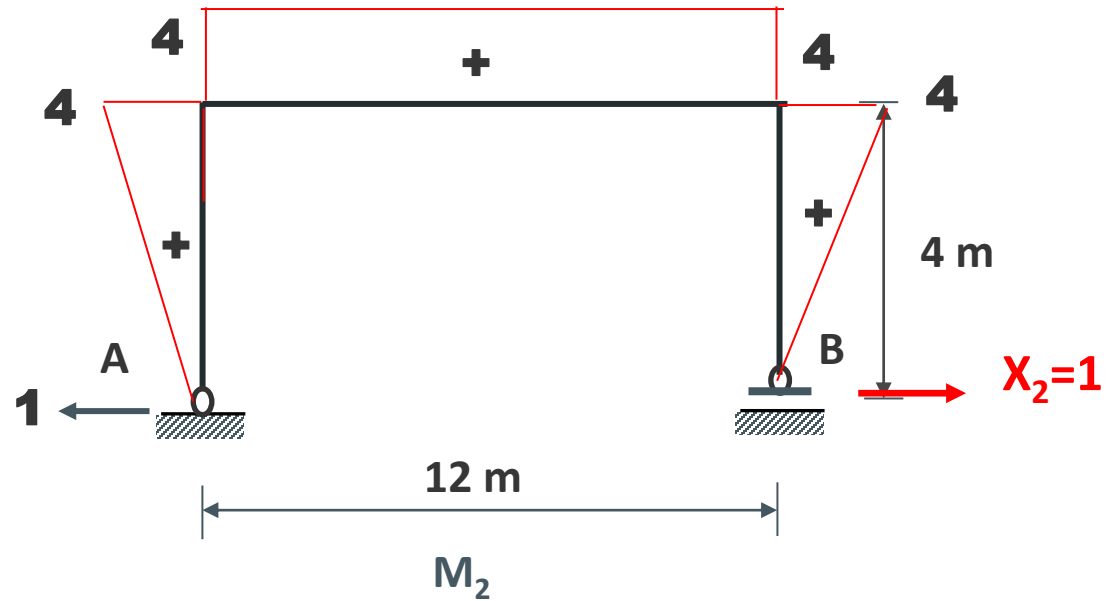
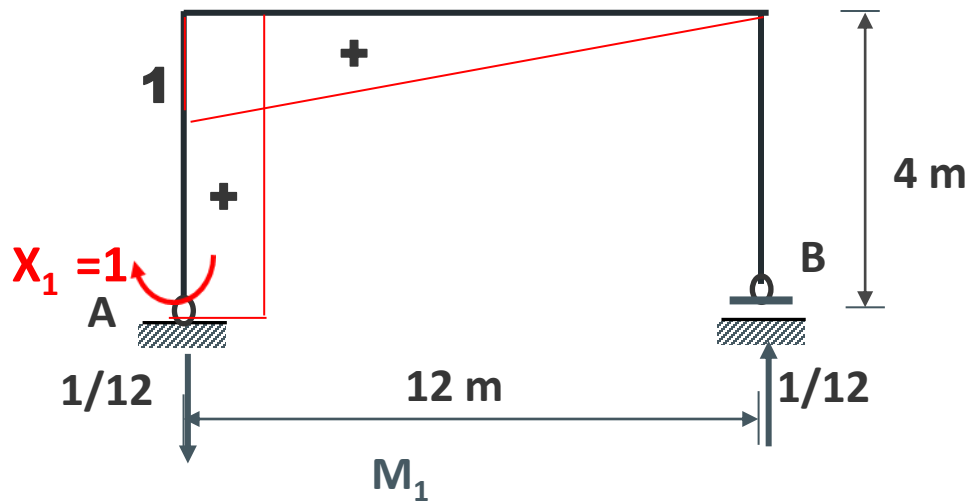
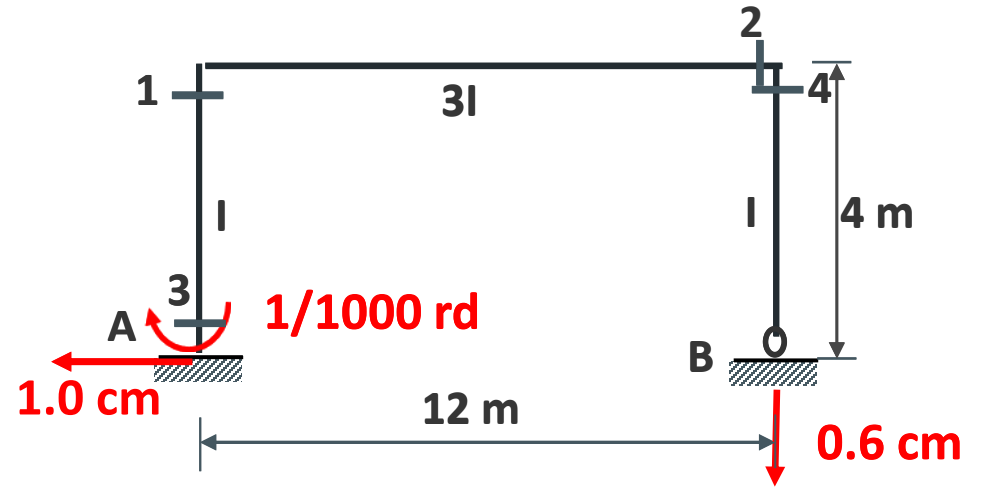
$$EI_c = 2.1 * 10^6 * 3 * 80 * 10^{-4} = 48 * 10^3$$

$$J_1 = 1 * \frac{1}{1000} - \frac{1}{12} * (0.006) = 0.5 * 10^{-3}$$

$$J_2 = 1 * 1 * 10^{-2} = 10^{-2}$$

$$EI_c J_1 = 48 * 10^3 * 0.5 * 10^{-3} = 24$$

$$EI_c J_2 = 48 * 10^3 * 10^{-2} = 480$$



$$EI_c \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = EI_c \begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{Bmatrix}$$

$$EI_c \delta_{11} X_1 + EI_c \delta_{12} X_2 = EI_c J_1$$

$$EI_c \delta_{21} X_1 + EI_c \delta_{22} X_2 = EI_c J_2$$

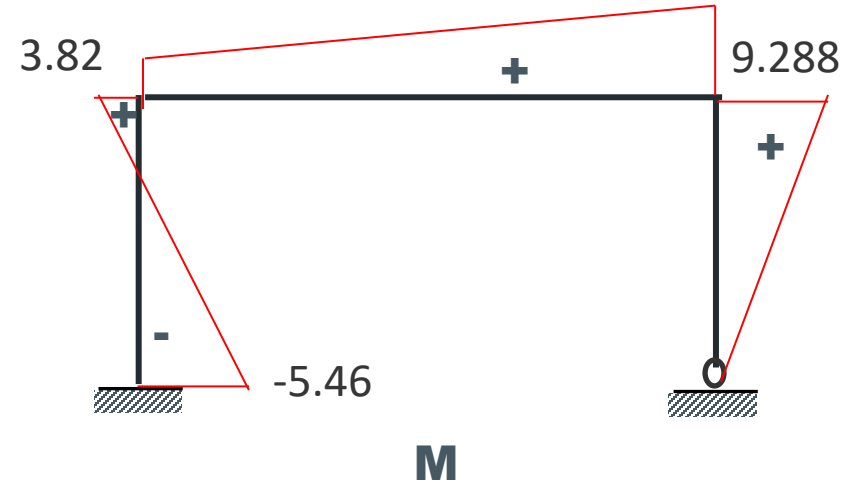
$$16X_1 + 48X_2 = 24$$

$$48X_1 + 320X_2 = 480$$

$$X_1 = -5.46 \text{ tm} \quad X_2 = -2.32 \text{ t}$$

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2$$

$$M_0 = 0 \text{ dış yük} = 0$$



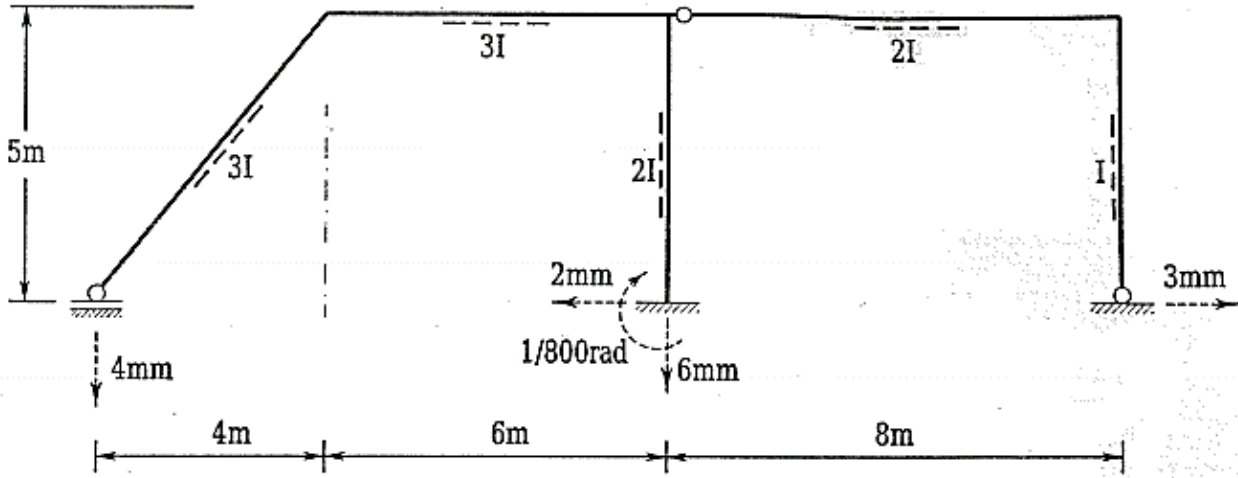
$$M_{(1)} = 1 * (-5.46) + 4 * (2.32) = 3.82 \text{ tm}$$

$$M_{(2)} = 0 * (-5.46) + 4 * (2.32) = 9.28 \text{ tm}$$

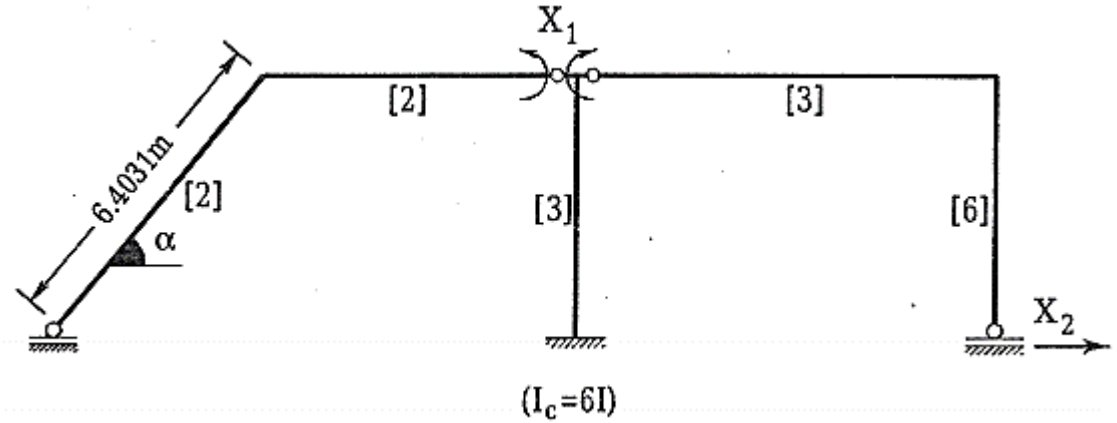
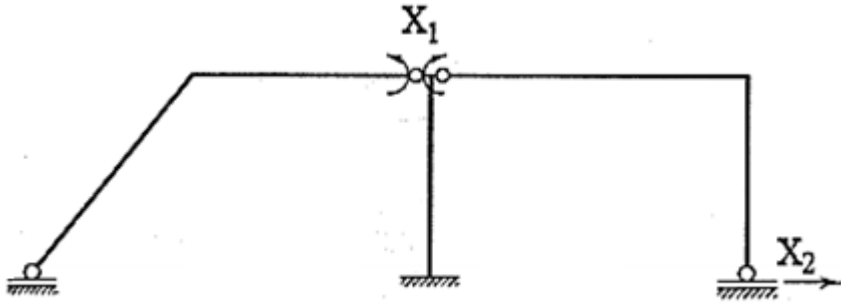
$$M_{(2)} = M_{(4)} = 9.28 \text{ tm}$$

$$M_{(3)} = 1 * (-5.46) + 0 * (2.32) = -5.46 \text{ tm}$$

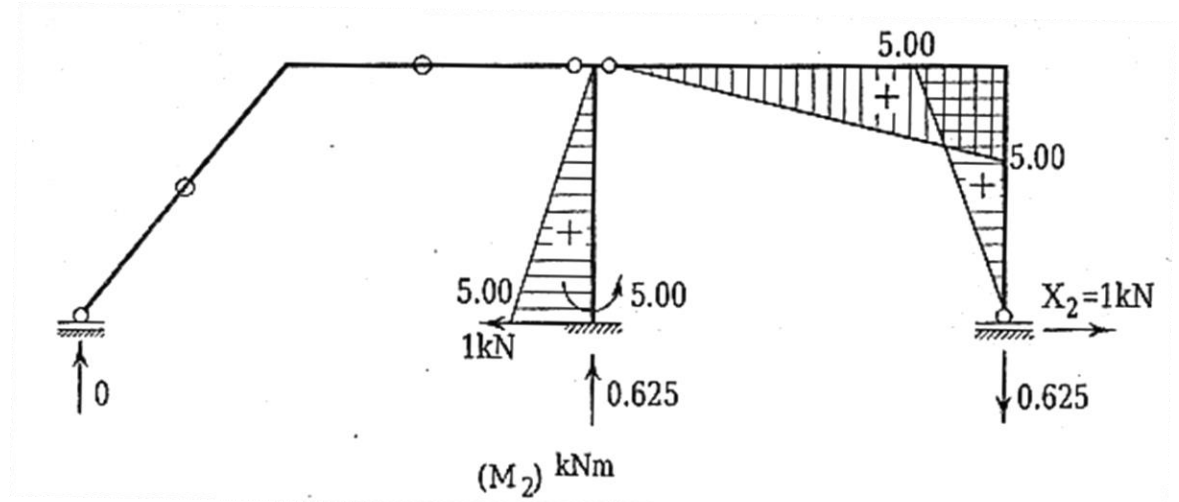
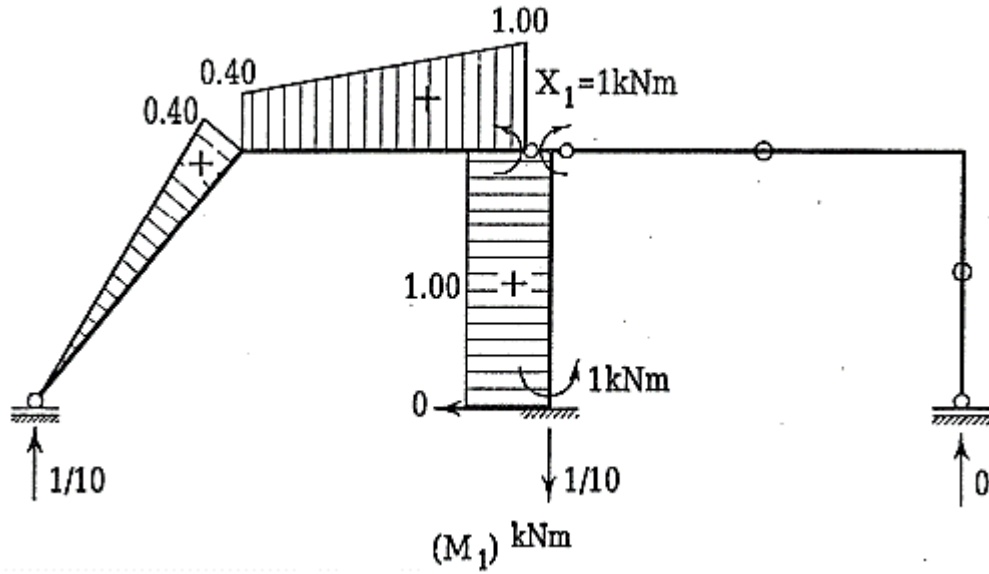
ÖRNEK 8



Şekildeki hiperstatik sistemde verilen mesnet çökmelerinden oluşan M ve T diyagramlarını çiziniz. ($EI=80000 \text{ kNm}^2$)



$$\sin \alpha = \frac{5}{6.4031} = 0.7809, \quad \cos \alpha = \frac{4}{6.4031} = 0.6247$$

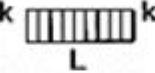
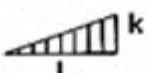
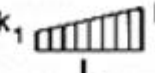
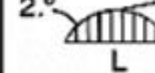
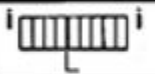





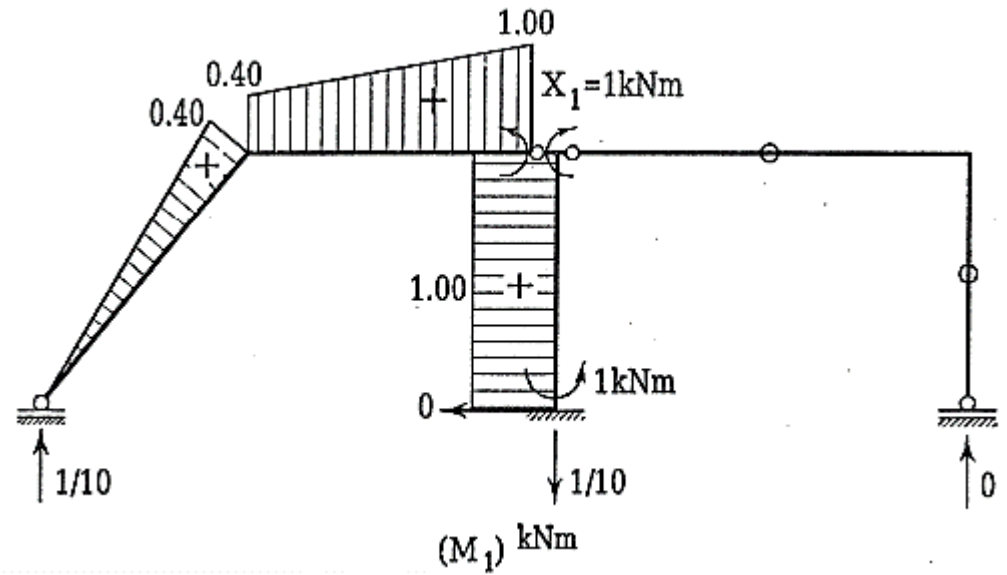
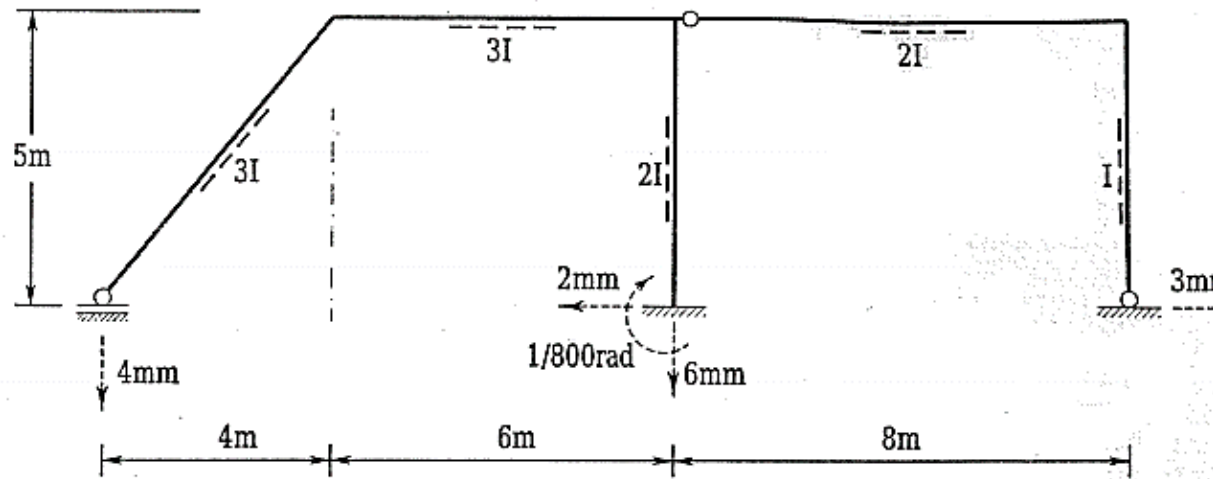
$$EI_c \delta_{11} = \frac{1}{3} \times 6.4031 \times (0.4)^2 \times [2] + \frac{1}{6} \times 6 \times (2 \times (0.4)^2 + 2 \times (0.4) + 2 \times 1^2) \times [2] + \dots$$

$$\dots + 5 \times 1 \times 1 \times [3] = 21.923$$

$$EI_c \delta_{22} = \frac{1}{3} \times 5 \times 5^2 \times [3] + \frac{1}{3} \times 8 \times 5^2 \times [3] + \frac{1}{3} \times 5 \times 5^2 \times [6] = 575$$

$$EI_c \delta_{12} = \frac{1}{2} \times 5 \times 1 \times 5 \times [3] = 37.5$$

ÇARPIM TABLOSU				
	k 		k_1 	2° 
	Lk	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{2}L(k_1 + k_2)$	$\frac{2}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{3}Lk$	$\frac{1}{6}L(k_1 + 2k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}Lk$	$\frac{1}{6}Lk$	$\frac{1}{6}L(2k_1 + k_2)$	$\frac{1}{3}Lk_m$
	$\frac{1}{2}L(i_1 + i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1 + 2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1 + i_1k_2 + i_2k_1 + 2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1 + i_2)k_m$

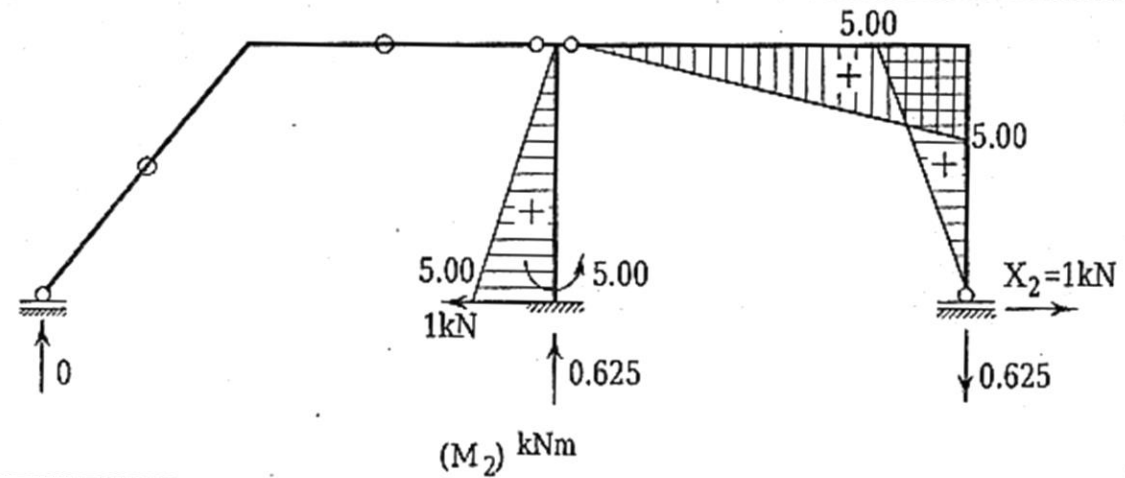


$$I_c = 6 I$$

$$EI_c J_1 = 6 \times 80000 \times \left((-0.4) \times 10^{-2} \times 0.10 + 0.6 \times 10^{-2} \times 0.10 - 1 \times \frac{1}{800} \right) = -504$$

$$EI_c J_2 = 6 \times 80000 \times \left((-5) \times \frac{1}{800} - 0.6 \times 10^{-2} \times 0.625 + 0.2 \times 10^{-2} \times 1 + 0.3 \times 10^{-2} \times 1 \right)$$

$$\Rightarrow EI_c J_2 = -2400$$



Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

$$\begin{bmatrix} 21.923 & 37.5 \\ 37.5 & 575 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -504 \\ -2400 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = -17.84, X_2 = -3.01$$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \Rightarrow M = -17.84 \times M_1 - 3.01 \times M_2$$

